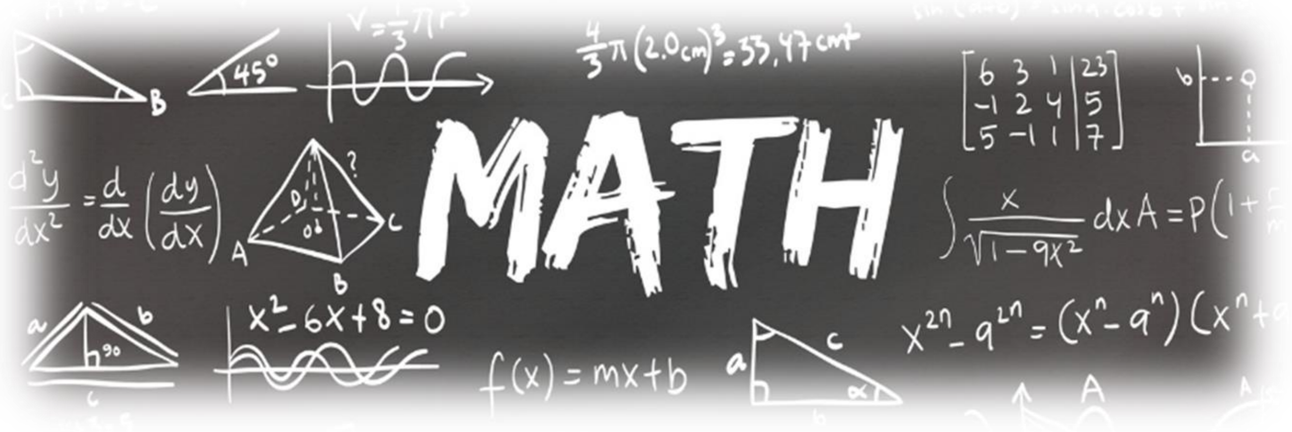
دانشگاه جامع علمی-کاربردی

شرکت حمل و نقل ریلی رجا
RAJA RAIL TRANSPORTATION CO.

دانشگاه جامع علمی-کاربردی



- عنوان درس: **ریاضیات**
- مدرس: **دکتر احمد رحمتی علائی**
- مبحث: تابع

تابع

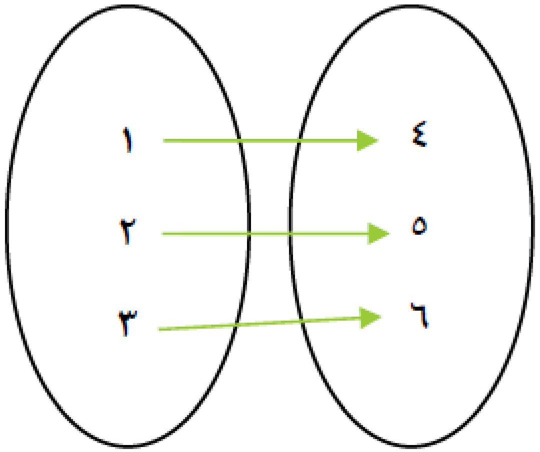
تابع مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب می‌باشد که هیچ دو زوجـی از آن دارای مولفـه‌هـای اول یکسـان نیستند. اگر مولفه‌های اول برابر باشند، مولفهٔ دوم نیز برابر باشند. به عبارت دیگر، اگر f تابع باشد آنگاه :

$$\begin{cases}(x,y) \in f \\ (x,z) \in f\end{cases} \Rightarrow y = z$$

نمایش های تابع

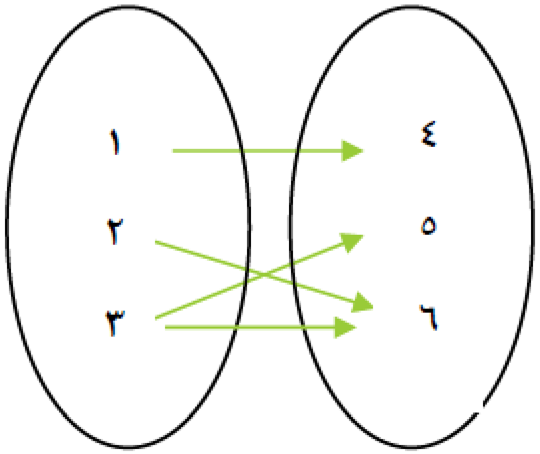
۱ نمودار پیکانی تابع

۱)



از هر عضو اولی، دقیقا یک فلش خارج شده باشد.

۲)



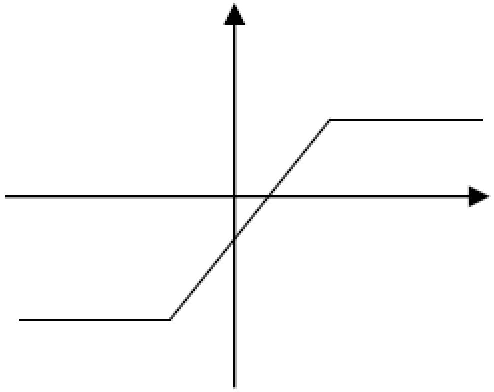
۲ زوج مرتب

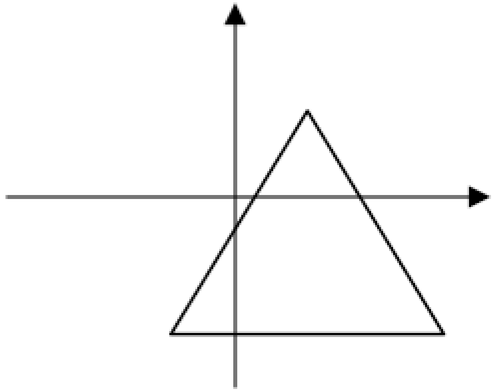
$$\{(-۱,-٤),(۳,-٥),(۷,٥)\}$$

$$\{(-۱,۱),(۰,۲),(-۱,۳)\}$$

اگر دو زوج، مولفه‌ی اول تکراری داشته باشند، مولفه دومشان باید مساوی باشد.

۳ نمودار مختصاتی





هیچ دو نقطه ای زیر هم قرار نداشته باشند. (خط‌های موازی محور yها، نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع کند).

٤ نمایش ضابطه‌ای تابع

$$y = x^{۲}$$

ضابطه را یک بار برای x و $y_{۱}$ و بار دیگر برای x و $y_{۲}$ می‌نویسیم و باید نتیجه بگیریم $y_{۱} = y_{۲}$.

تابع

به ازای کدام مقدار a، رابطهٔ $A = \{(a,۴), (۲, a^۲+۳a), (-۴،۱), (۲،۴)\}$ تابع است ؟

۱) ۴-　　۲) ۱　　۳) ۲　　۴) بی شمار

رابطهٔ A تابع است و زوج مرتب های $(۲,۴), (۲, a^۲+۳a)$ دارای مؤلفه های اول برابرند. پس باید مؤلفه های دوم نیز در آن ها برابر باشند، پس :

$$a^۲+۳a=۴ \Rightarrow a^۲+۳a-۴=۰ \Rightarrow a=۱,-۴$$

به ازای a= -۴ ، زوج مرتب های (-۴،۱) , (a,۴) دارای مؤلفه های اول برابر هستند بنابراین به ازای a= -۴ این رابطه تابع نخواهد بود. ولی به ازای a=۱ ، این رابطه یعنی $A = \{(۱،۴), (۲،۴), (-۴،۱)\}$ تابع است. بنابراین گزینهٔ ۲ صحیح می باشد.

تابع

اگر بتوان y برحسب x را به صورت یک ضابطهٔ صریح مانند $y=f(x)$ نمایش داد، واضحه که رابطهٔ مورد نظر تابع است. به مثال زیر توجه کنید :

مثال : رابطهٔ $y^۳+۳y=۳y^۲+x$ مربوط به تابع است، زیرا :

$$y^۳+۳y=۳y^۲+x \Rightarrow y^۳-۳y^۲+۳y-۱=x-۱$$

$$\Rightarrow (y-۱)^۳=x-۱ \Rightarrow y=\sqrt[۳]{x-۱}+۱ \quad ✓$$

اما رابطهٔ $x^۲+۵y^۲+۲xy=۴y$ مربوط به یک تابع نیست. زیرا :

$$x^۲+۲xy+y^۲+۴y^۲-۴y=۰ \Rightarrow (x+y)^۲+(۲y-۱)^۲=۱$$

مثال نقض

$$x=۰ \Rightarrow ۵y^۲-۴y=۰ \Rightarrow y=۰,\frac{۴}{۵} \quad ✗$$

تابع

در تابع $y=f(x)$ به مجموعهٔ تمام مؤلفه های اول، دامنهٔ تابع گفته می شود.دامنهٔ تابع f با نماد D_f نمایش داده می شود. به عبارت دیگر داریم :

$$D_f = \{x | (x,y) \in f\}$$

مشخص است که اگر $f : A \to B$، یک تابع باشد، مجموعهٔ A همان دامنهٔ تابع است.

تعیین دامنهٔ تابع

برای تعیین دامنهٔ تابع به موارد زیر توجه می کنیم:

۱-در توابع کسری به صورت $\frac{f(x)}{g(x)}$ ، ریشه های مخرج کسر در دامنهٔ تابع وجود ندارند.

۲-در توابع گنگ به صورت $y = \sqrt[n]{f(x)}$، اگر n زوج باشد، محدودیت $f(x) \geq 0$ برای دامنهٔ تابع لازم است. اگر n فرد باشد، محدودیتی از این بابت وجود نخواهد داشت.

تابع

۳-در توابعی به صورت y=tan(f(x)) مقادیری از x که به ازای آن ها $f(x)=k\pi+\frac{\pi}{۲}$ از دامنهٔ تابع خارج می شوند. در مورد y=cot(f(x)) نیز مقادیری از x که در $f(x)=k\pi$ صدق می کنند از دامنهٔ این تابع حذف می شوند.$(k\in\mathbb{Z})$

۴-در توابعی به صورت $y=\sin^{-۱}(f(x))$ یا $y=\cos^{-۱}(f(x))$، محدودیت $-۱\leq f(x)\leq ۱$ برای دامنهٔ تابع ضروری است.

۵-در توابع لگاریتمی به صورت $y=\log_{g(x)}^{f(x)}$ نیز شرایط زیر باید برقرارباشد :

$۱) f(x)>۰$ $۲) g(x)>۰$ $۳) g(x)\neq ۱$

تابع

تذکر : اگر در ضابطهٔ یک تابع چند مورد از موارد بالا وجود داشت باید جواب هـای بدست آمده را با هم اشتراک گرفت.

در هریک از موارد زیر دامنهٔ تابع y=f(x) عبارت است از :

$$۱)y=\frac{x^{۲}-۱}{x^{۲}+۲x-۳}=\frac{(x-۱)(x+۱)}{(x-۱)(x+۳)}\Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{۱,-۳\}$$

$$۲)y=\sqrt{x-x^{۲}}\Rightarrow x-x^{۲}=x(۱-x)\geq ۰\Rightarrow ۰\leq x\leq ۱\Rightarrow D_f=[۰,۱]$$

$$۳)y=\cot(۳x)\Rightarrow ۳x=k\pi\Rightarrow x=\frac{k\pi}{۳}\Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\left\{\frac{k\pi}{۳}\middle|k\in\mathbb{Z}\right\}$$

تابع

$$۴)\, y=\sin^{-۱}\left(\frac{۱}{x}\right)\Rightarrow -۱\le\frac{۱}{x}\le ۱\Rightarrow\begin{cases}۰<\dfrac{۱}{x}\le ۱\\[2ex] -۱\le\dfrac{۱}{x}\le ۰\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\ge ۱\\ or\\ x\le -۱\end{cases}$$

$$\Rightarrow D_f=\mathbb{R}-(-۱,۱)$$

$$۵)\, y=\log_{x+۱}(۳-x)\Rightarrow ۳-x>۰,\, x+۱>۰,\, x+۱\ne ۱$$

$$\Rightarrow -۱<x<۳,\, x\ne ۰\Rightarrow D_f=(-۱,۳)-\{۰\}$$

تابع

تساوی دو تابع

دو تابع f و g با یک دیگر مساوی اند در صورتی که دو شرط زیر را داشته باشند :

۱-دامنهٔ دو تابع برابر باشد یعنی : $D_f = D_g = D$

۲- به ازای هر $x \in D$ داشته باشیم : $f(x) = g(x)$

مثال : دو تابع $f(x) = \log x^۲$ و $g(x) = ۲\log x$ با هم مساوی نیستند زیرا $D_f = \mathbb{R} - \{۰\}$ و $D_g = \mathbb{R}^+$ با هم برابر نیستند.

دو تابع $f(x) = \frac{۲\tan x}{۱ - \tan^۲ x}$ و $g(x) = \tan ۲x$ با هم مساوی نیستند زیرا دامنهٔ دو تابع با یک دیگر مساوی نیست. چون : $\frac{\pi}{۲} \notin D_f$ ولی $\frac{\pi}{۲} \in D_g$

عملیات بر روی توابع

اگر توابع f و g تعریف شده باشند، مجموع،تفاضل، ضرب و تقسیم آن ها به صورت زیر تعریف می شوند:

$$\begin{cases}(f.g)(x)=f(x)g(x)\\ (\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)}\end{cases}\qquad \begin{cases}(f+g)(x)=f(x)+g(x)\\ (f-g)(x)=f(x)-g(x)\end{cases}$$

بافرض اینکه D_f دامنهٔ تابع f و D_g دامنهٔ تابع g باشد، دامنهٔ توابع $f\pm g$ و $f.g$ برابر $D_f\cap D_g$ است. اما در مورد دامنهٔ تابع $\frac{f}{g}$ لازم است که $g(x)\neq 0$ ،بنابراین ریشه های مخرج را از $D_f\cap D_g$ حذف می کنیم :

$$D_{\frac{f}{g}}=D_f\bigcap D_g-\{x|g(x)=0\}$$

در واقع به ازای هر ورودی مناسب x ، عملیات مورد نظر را روی خروجی ها انجام می دهیم.

تابع

عملیات بر روی توابع

مثال : اگر $f(x)=\sqrt{x-۲}+\sqrt{۵-x}$ و $g(x)=\sqrt{x-۲}-\sqrt{۵-x}$، دامنه و ضابطهٔ تابع $f\times g$ عبارت است از :

$$D_f=D_g=[۲,۵]\Rightarrow D_{f\times g}=D_f\cap D_g=[۲,۵]$$

$$(f\times g)(x)=f(x)g(x)=(\sqrt{x-۲}+\sqrt{۵-x})(\sqrt{x-۲}-\sqrt{۵-x})$$

$$=(x-۲)-(۵-x)=۲x-۷$$

تابع

مثال۱)دامنه تابع با ضابطه ی $f(x)=\sqrt{۱-\log(x-۱)}$ به کدام صورت است؟

۱) $(۱،۲]$ ۲) $[۲،۱۰]$ ۳) $[۱,۱)$ ۴) $(۱،۱۱]$

تابع

در log_b^a لازم است a>۰ و b>۰ و b≠۱ باشد.

$$\Rightarrow log^{(x-۱)} \Longrightarrow x-۱>۰ \Longrightarrow x>۱$$

در نامعادلات لگاریتم :

$$log_b^a \geq k \Longrightarrow \begin{cases} b>۱ \Longrightarrow & a \geq b^k \\ ۰<b<۱ \Longrightarrow & a \leq b^k \end{cases}$$

در واقع اگر مبنا بین صفر و یک باشد جهت نامساوی عوض می شود.

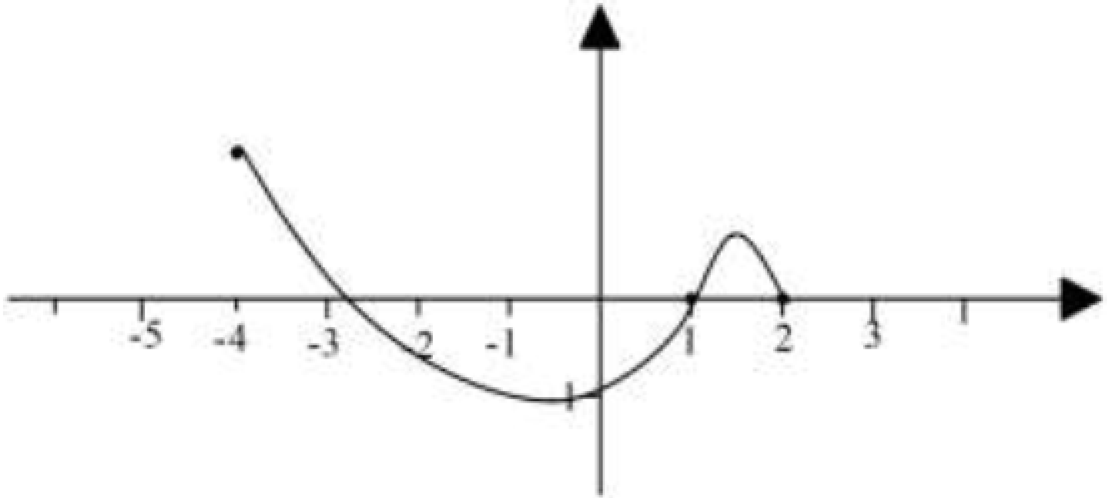
$$۱-log^{(x-۱)} \geq ۰ \Rightarrow -log^{(x-۱)} \geq -۱ \Rightarrow log^{(x-۱)} \leq ۱ \Rightarrow x-۱ \leq ۱۰^{۱} \Rightarrow$$

$x \leq ۱۱ \Rightarrow$ اشتراک ۱ < x ≤ ۱۱ ⇒ گزینه ۴ صحیح است

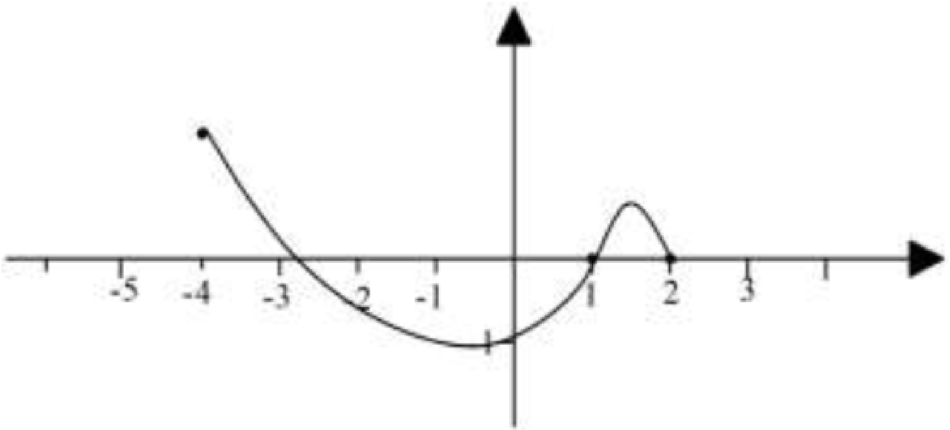
تابع

مثال ۸)شکل زیر نمودار تابع $y=f(x)$ است دامنه ی تابع $\sqrt{xf(x)}$ کدام است؟

۱) [-۳،۲] ۲) [-۴,-۳]U[۱،۲] ۳)[۰،۲] ۴)[-۳،۰]U[۱،۲]



تابع



$$xf(x) \geq \cdot \Rightarrow \begin{cases} x \geq \cdot, f(x) \geq \cdot \Rightarrow x \geq \cdot, y \geq \cdot \Rightarrow \text{ناحیه ۱} \Rightarrow [۱,۲] \\ x \leq \cdot, f(x) \leq \cdot \Rightarrow x \leq \cdot, y \leq \cdot \Rightarrow \text{ناحیه ۳} \Rightarrow [-۳,\cdot] \end{cases}$$

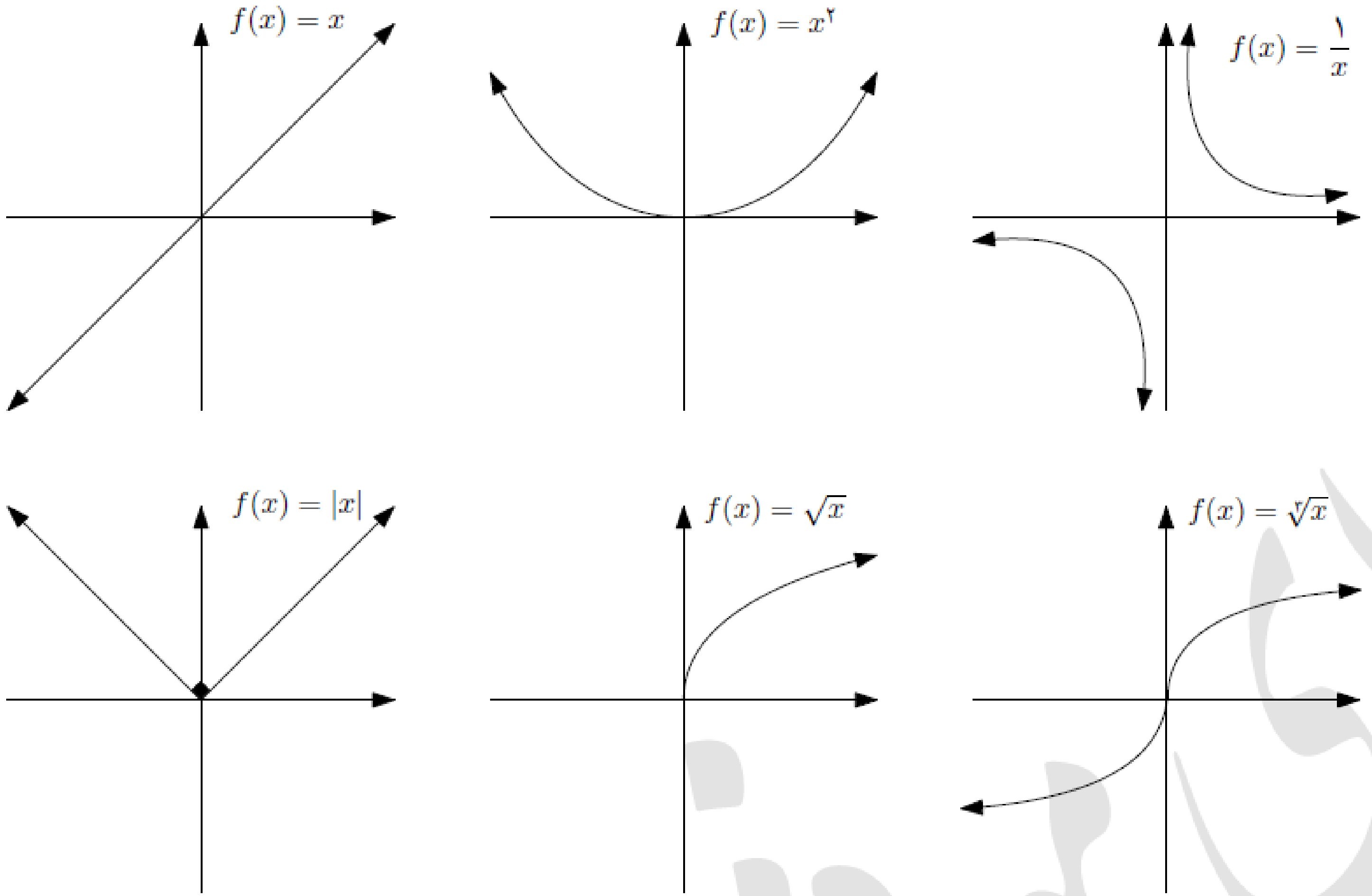
می دانیم *f(x)* همان *y*است .

پس جواب نهایی $[۱,۲] \cup [-۳,\cdot]$

پس گزینه ۴ صحیح است.

تابع

فرم کلی برخی توابع در زیر آمده است.

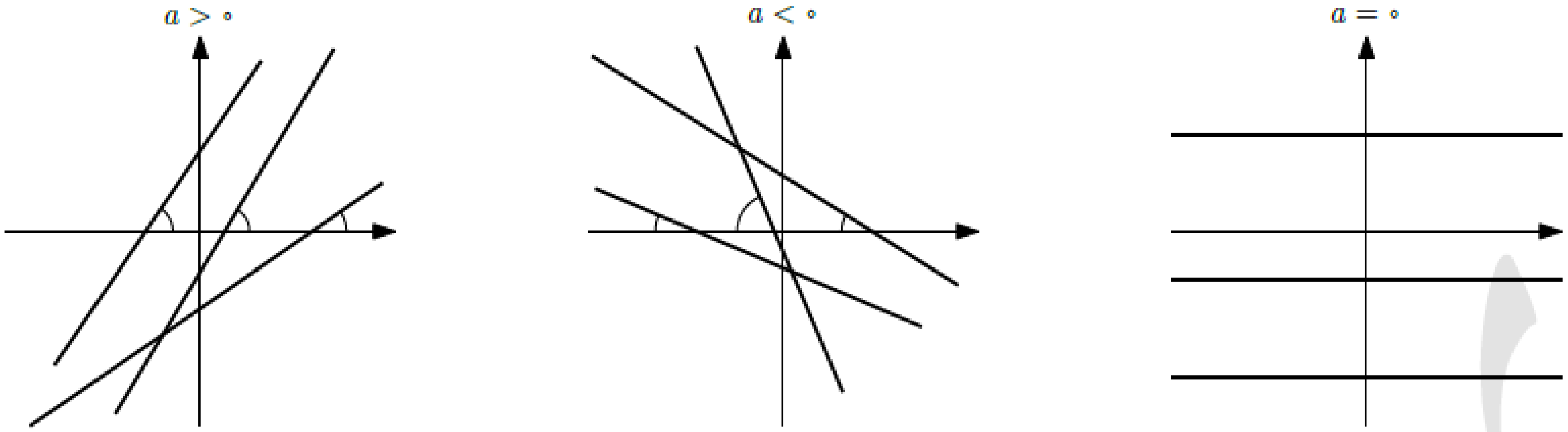


تابع

درجه یک (خطی)

معرفی: هر تابع درجه‌ی یک به فرم کلی $f(x) = ax + b$ است. که مقدار a شیب و مقدار b را عرض از مبدأ می‌نامند.

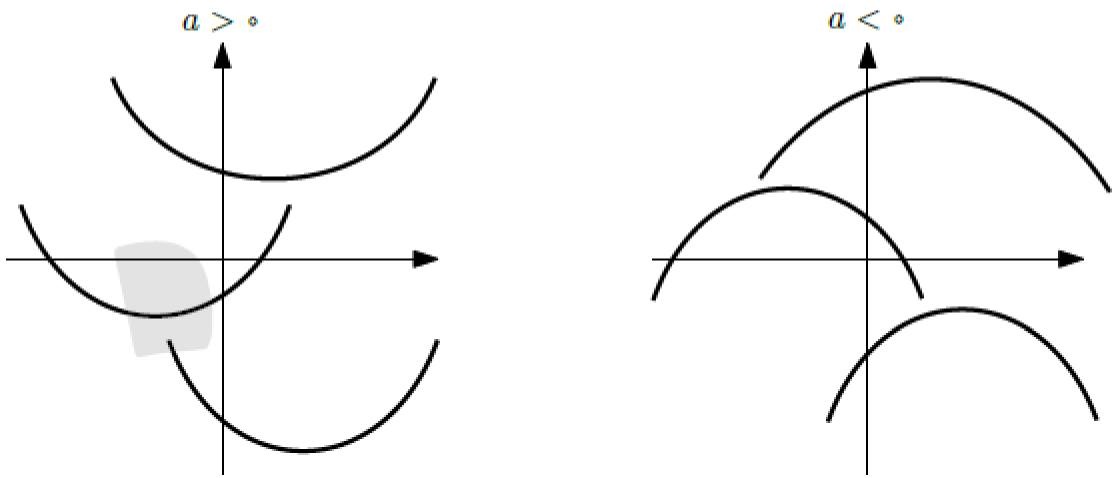
شکل کلی: اگر $a > 0$ زاویه‌ای که خط با قسمت مثبت محور xها می‌سازد کمتر از ۹۰ درجه است و اگر $a < 0$ زاویه‌ای که خط با قسمت مثبت محور xها می‌سازد بیشتر از ۹۰ درجه است. اگر $a = 0$ باشد حالت خاصی از خط به دست می‌آید که به آن تابع ثابت گفته می‌شود و موازی محور xها است.



درجه دو (سهمی)

معرفی: هر تابع درجه‌ی دو به فرم کلی $f(x) = ax^{۲} + bx + c$ است. که مقدار c را عرض از مبدأ می‌نامند.

شکل کلی: اگر $a > ۰$ سهمی به سمت بالا و اگر $a < ۰$ سهمی به سمت پایین خواهد بود. همچنین c محل برخورد سهمی با محور yها است.

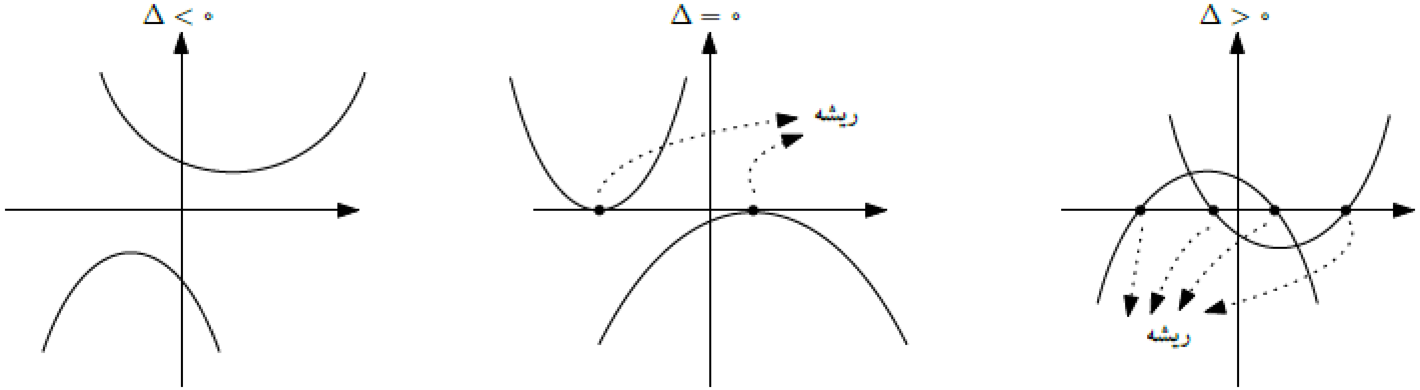


تابع

درجه دو (سهمی)

ریشه: اگر $\Delta = b^2 - 4ac$ منفی باشد، سهمی ریشه‌ی حقیقی ندارد، اگر صفر باشد یک ریشه دارد و اگر مثبت باشد دو ریشه دارد.

$$ax^2 + bx + c = 0 \Longrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \Longrightarrow & x_1\ ,\ x_2 = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \\ \Delta = 0 \Longrightarrow & x_1 = x_2 = \dfrac{-b}{a} \\ \Delta < 0 \Longrightarrow & \text{ریشه‌ی حقیقی ندارد} \end{cases}$$

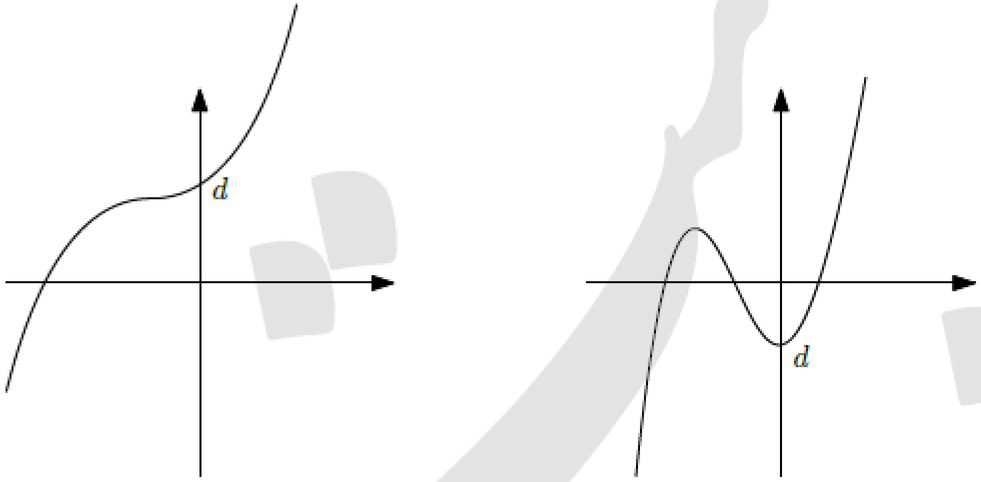


تابع

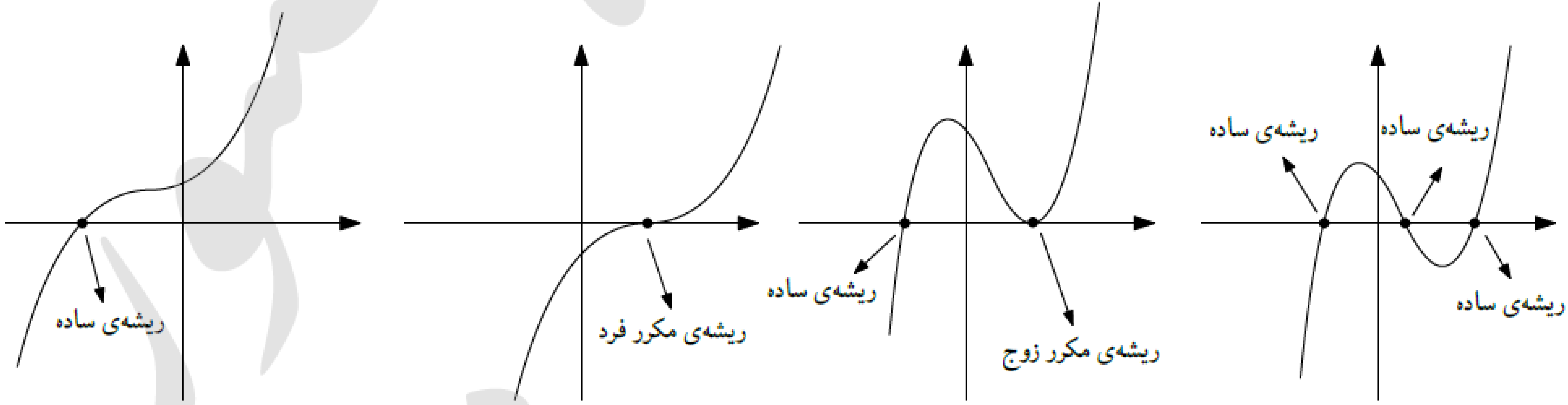
درجه سه (لُر)

معرفی: هر تابع درجه‌ی سه به فرم کلی $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ است. که مقدار d را عرض از مبدأ می‌نامند.

شکل کلی: نمودار توابع درجه سه به دو صورت کلی زیر می‌باشد. اما اینکه با توجه به ضابطه‌ی تابع کدام شکل خواهد بود، اکنون نمی‌توان به این سوال پاسخ داد. همچنین d محل برخورد سهمی با محور yها است.

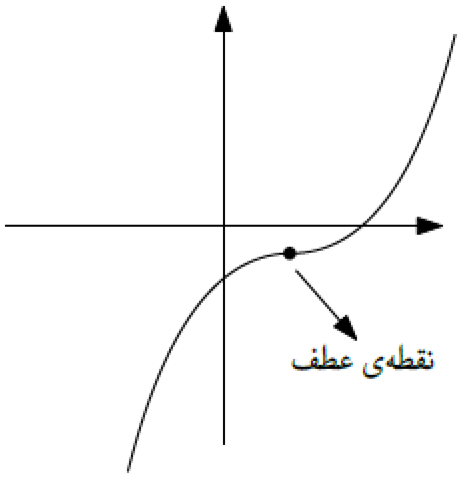


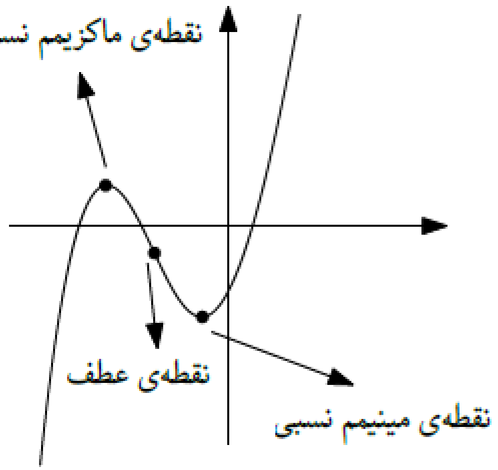
ریشه: با توجه به نوع تجزیه‌ای که برای توابع درجه سه انجام می‌شود، تعداد ریشه‌ها مشخص می‌شود؛ اما نکته‌ی مهم آن است که توابع درجه سه همواره حداقل یک ریشه را دارند (به شکل آن دقت کنید). هیچ راه کليِ ساده‌ای جز تجزیه کردن برای پیدا کردن ریشه‌های توابع درجه سه وجود ندارد.



تابع

نقاط کلیدی: هر تابع درجه سه، قطعا یک نقطه‌ی عطف دارد. نقطه‌ی عطف نقطه‌ای است که در آن جهت تقعر شکل عوض می‌شود. همچنین با توجه به شکل در برخی موارد یک ماکزیمم نسبی و یک مینیمم نسبی نیز خواهد داشت. محاسبه‌ی ماکزیمم و مینیمم‌های نسبی را در سال آینده مطالعه خواهند شد. اما x نقطه‌ی عطف برابر است با $\frac{-b}{3a}$ و برای به دست آوردن y نقطه‌ی عطف کافیست که x رأس به دست آمده را داخل تابع قرار دهیم.





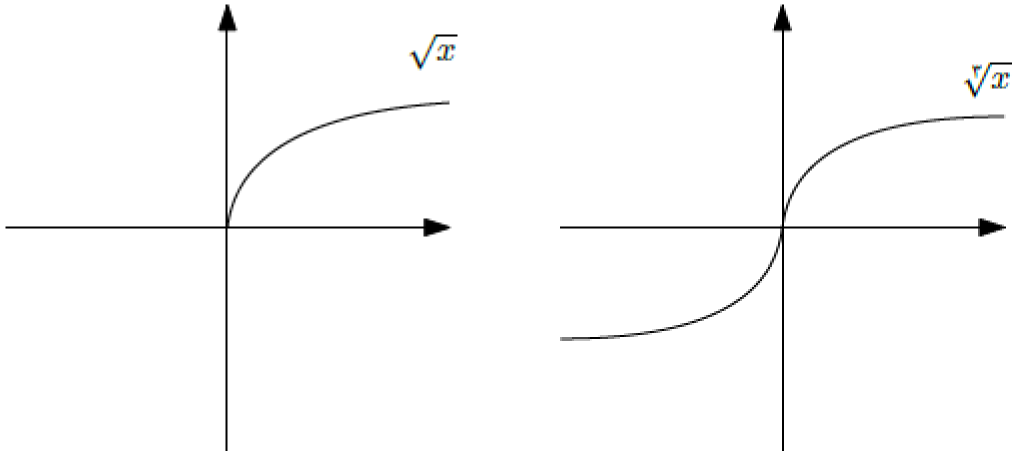
دامنه و برد: هم دامنه و هم برد توابع درجه سه، همواره $\mathbb{R}$ است.

تابع

ریشه‌ی nام

معرفی: هر تابع با فرم کلی $f(x) = \sqrt[n]{P(x)}$ که در آن $P(x)$ یک چندجمله‌ای است را تابع ریشه‌ی nام گوییم.

شکل کلی: فرم کلی توابع رادیکالی به شرطی که زیر رادیکال یک تابع درجه یک باشد، به صورت زیر خواهد بود. در غیر این صورت رسم آن به سادگی امکان‌پذیر نیست.

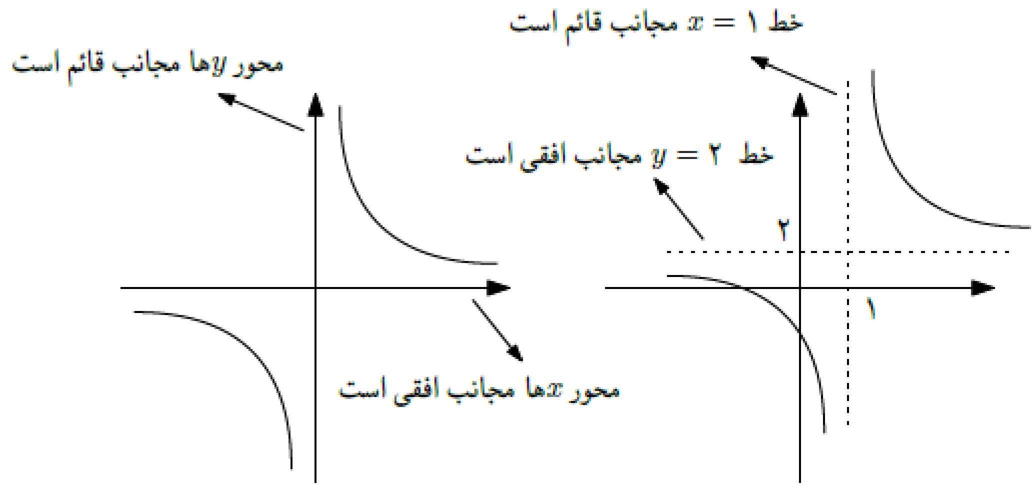


دامنه و برد: دامنه و برد توابع ریشه‌ی nام به شرطی که n فرد باشد همواره $\mathbb{R}$ می‌باشد. اگر n زوج باشد، دامنه‌ی آن برابر با مقادیری است که زیر رادیکال مثبت باشد. برد اینگونه توابع نیز به این صورت محاسبه می‌شود که ابتدا کمترین مقدار زیر رادیکال را به دست آورده و سپس آن را بجای عبارت زیر رادیکال قرار داده تا کمترین مقدار تابع به دست آید. برد اینگونه توابع تا بی‌نهایت ادامه دارد.

گویا (هموگرافیک)

معرفی: هر تابع به فرم $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ که در آن $P(x)$ و $Q(x)$ چندجمله‌ای هستند را تابع گویا گوییم.

شکل کلی: هر تابع هموگرافیک به صورت $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ همواره دارای دو مجانب افقی و عمودی است (توجه داشته باشید که این شکل در حالت خاص است که در آن صورت و مخرج عبارات خطی قرار دارند):

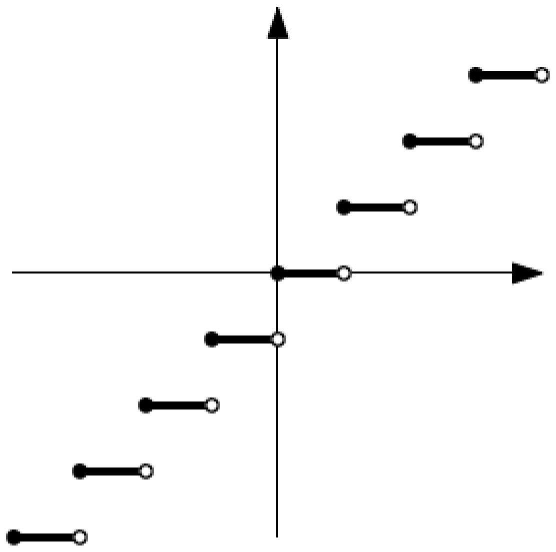


جزء صحیح (براکت)

معرفی: تابعی که به هر عدد حقیقی غیر صحیح، عدد صحیح ماقبل خود را نسبت می‌دهد و به هر عدد صحیح خود آن را نسبت می‌دهد، تابع جزء صحیح گوییم و به صورت $f(x) = [x]$ نمایش داده می‌شود.

نکته: اگر $n \leqslant x < n + ۱$ که در آن n یک عدد صحیح است، آنگاه $[x] = n$.

شکل کلی: شکل کلی توابع جزء صحیح پله‌ای است (تابع جزء صحیح حالت خاصی از توابع پله‌ای است که در ادامه مطالعه خواهند شد):



تابع

ترکیب دو تابع

۱) $f(g(x)) = fog(x)$ یعنی در تابع f به جای x ها ، $g(x)$ قرار می‌دهیم.

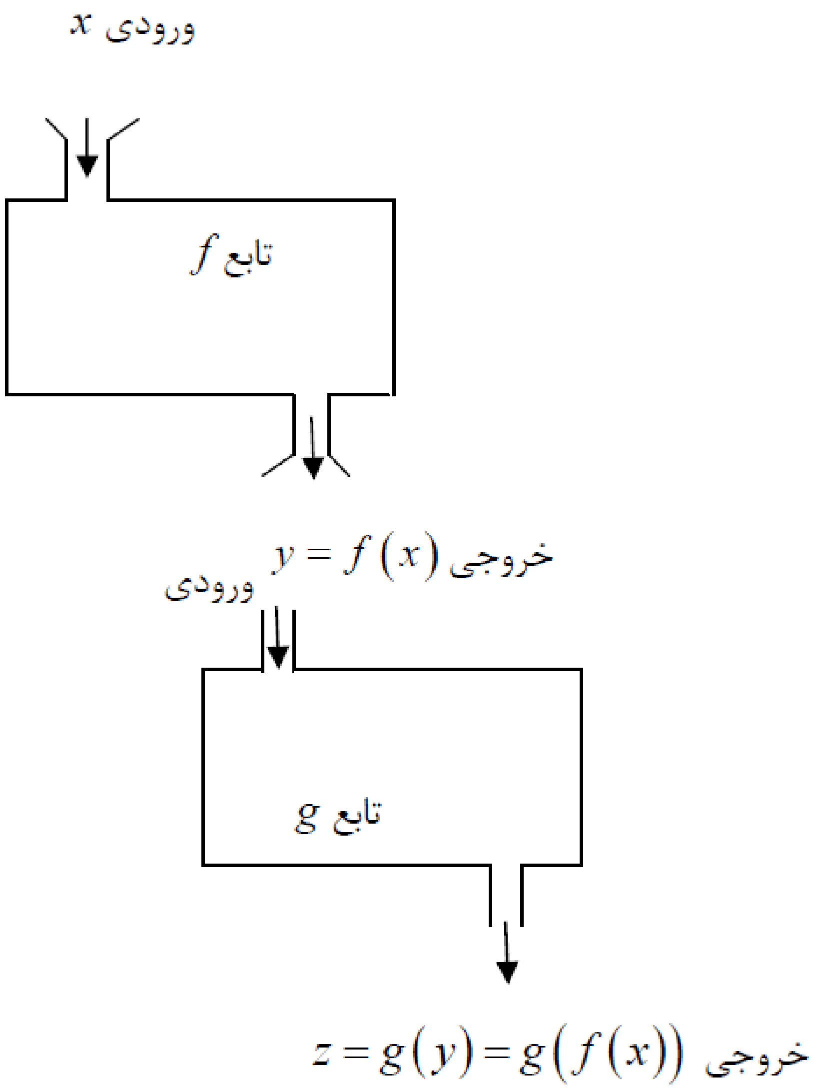
۲) $g(f(x)) = gof(x)$ یعنی در تابع g به جای x ها، $f(x)$ را قرار می‌دهیم.

۳) دامنه‌ی توابع fog و gof:

$$D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

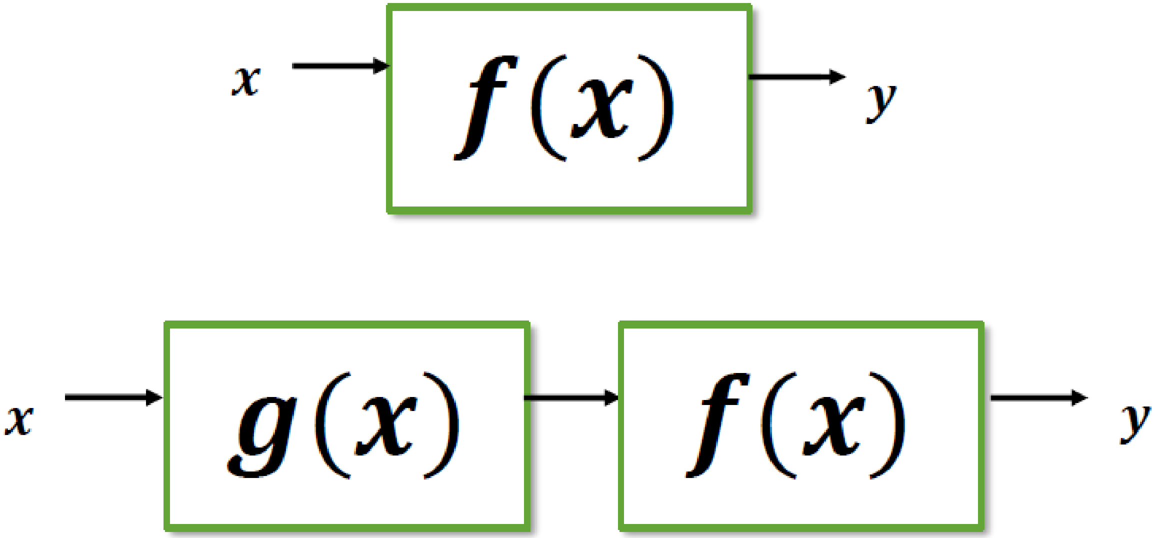
$$D_{gof} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

تابع



تابع

ترکیب توابع



$$f(g(x))$$

$$fog(x)$$

اگر $f(x)=\sqrt{\sin \pi x+[\cos ۲\pi x]}$ و $g(x)=\frac{۱}{x^{۵}-۳f(x)}$ آن‌گاه حاصل $gof(۰)$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ٤) $\frac{۱}{۲}$

تابع

اگر $f(x)=\sqrt{\sin \pi x+[\cos ۲\pi x]}$ و $g(x)=\dfrac{۱}{x^{۵}-۳f(x)}$ آن‌گاه حاصل $gof(۰)$ کدام است؟

۱) ۲   ۲) $-\dfrac{۱}{۲}$ ۳) $\dfrac{۳}{۲}$ ٤) $\dfrac{۱}{۲}$

$$gof(۰)=g(f(۰))=g(\sqrt{\sin ۰+[\cos ۰]})=g(۱)=\frac{۱}{۱-۳f(۱)}=\frac{۱}{۱-۳\sqrt{\sin \pi+[\cos ۲\pi]}}=\frac{۱}{۱-۳}=-\frac{۱}{۲}$$

تابع

مثال ۲)اگر $f(x) = ۲x^۲ + ۴$ و $f\left(g(x)\right) = ۴x^۲ + ۶x$ مقدار g(-۲) کدام است؟

۱)صفر ۲)۱ ۳)۱- ۴)۲

تابع

$$f\left(g(x)\right) = ۲g^{۲}(x) + ۴$$

$$\Rightarrow ۲g^{۲}(x) + ۴ = ۴x^{۲} + ۶x \xrightarrow{x=-۲} ۲(g(-۲))^{۲} + ۴ = ۴(-۲)^{۲} + ۴$$
$$= ۴(-۲)^{۲} + ۶(-۲)$$

$$\Rightarrow ۲g(-۲)^{۲} + ۴ = ۱۶ - ۱۲ \Rightarrow ۲g((-۲))^{۲} = ۰ \Rightarrow g(-۲) = ۰$$

تابع

اگر $f=\{(۲،۳)(۳،۵)(۴،۶)\}$ باشد تابع fof کدام است؟

۱) $\{(۳،۲)\}$ ۲) $\{(۲،۵)\}$ ۳) $\{(۲،۵)(۳،۵)\}$ ۴) $\{\ \}$

تابع

$$\boxed{f=\{(۲،۳)(۳،۵)(۴،۶)\}}$$

$$fof(x)=f(f(x)) \Longrightarrow$$

x	$f(x)$	$f(f(x))$
۲	۳	$f(۳)=۵$
۳	۵	$f(۵)=\times$
۴	۶	$f(۶)=\times$

گزینه ۲ صحیح است.$\Leftarrow \{(۲,۵)\}$

تابع

تابع یک به یک

۱- f تابعی یک به یک است هرگاه هیچ y ایی با دو x متمایز وجود نداشته باشد.

۲- از دید ریاضی f یک به یک است هرگاه $f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_1=x_2$

۳- از دید نمودار مختصاتی زمانی تابع یک به یک تعریف می‌شود که هر خط موازی محور xها نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

٤- از دید چند ضابطه‌ای‌ها وقتی تابع یک به یک تعریف می‌شود که دو شرط زیر برقرار باشد:

الف) تک‌تک ضابطه‌ها یک به یک باشند.

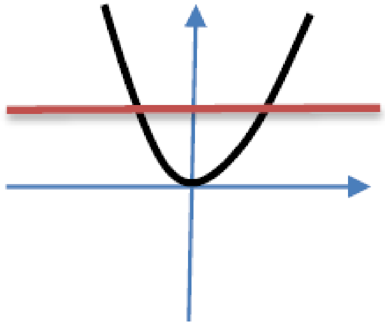
ب) اشتراک برد دوبه دو ضابطه‌ها تهی باشد.

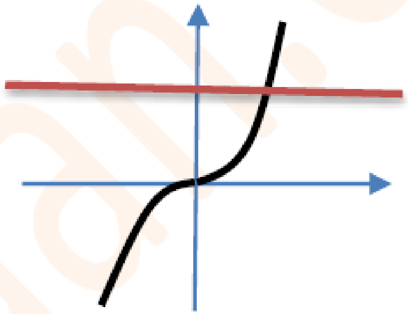
تابع

توی تعریف تابع f دیدیم که برای ورودی x ما تنها یک خروجی داریم و اون رو با $f(x)$ نشونش میدیم و برای اینکار از محک خط عمودی تو شکل ها استفاده کردیم.

اگه به تابع $y = x^2$ دقت کنید می بینید که عکس این مطلب درست نیست و ما برای خروجی ۲۵ میتونیم دوتا ورودی ۵ و ۵- رو داشته باشیم، یعنی $5^2 = 25$ و $(-5)^2 = 25$ و عکس این کار یعنی ریشه دوم گرفتن عدد ۲۵ دیگه تابع نیست و برای اینکه تابع بشه تعریف میکنیم که فقط ریشه های مثبت رو در نظر بگیریم.

اگه به تابع $y = x^3$ دقت کنید می بینید که عکس این مطلب هم درست هست و ما برای هر خروجی مثل ۲۷ تنها یک ورودی داریم و عکس اون هم می تونه تابع بشه. به توابعی که همچین ویژگی رو داشته باشه تابع یک به یک میگیم. برای بررسی یک به یک بودن یه تابع میتونیم محک خط افقی رو بکار ببریم، یعنی هر خط افقی علاوه بر خط عمودی تابع رو تنها در یک نقطه قطع کند. به شکل های زیر دقت کنید

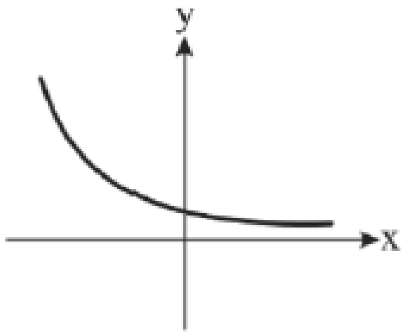




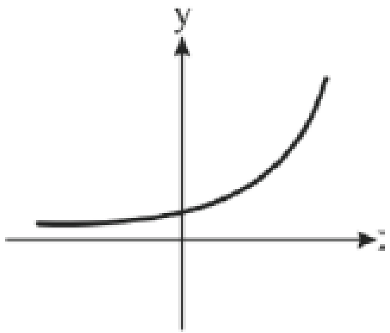
تابع

تعریف تابع نمایی: یک تابع بصورت $y = a^x$ که در آن پایه a بایستی یک عدد حقیقی مثبت مخالف ۱ باشد (یعنی $a \in \mathbb{R}^+$ و $a \neq 1$) و x نیز هر عدد حقیقی می تواند باشد را تابع نمایی گوییم و شکل آن نیز بصورت زیر می باشد.

همانطور که در شکل می بینید تابع نمایی برای $a \neq 1$ و مثبت همواره یک به یک بوده و دارای تابع وارون می باشد. به همین دلیل می باشد که مقدار ۱ را از پایه حذف می کنیم تا بتوانیم معکوس تابع نمایی که تابع معروف لگاریتم می باشد را تعریف کنیم. توجه کنید که نمودار تابع همواره بالای محور افقی می باشد بنابراین خروجی تابع نمایی همواره مثبت و ورودی تابع لگاریتمی نیز در نتیجه باید همواره مثبت باشد.



$y = a^x$ و $0 < a < 1$



$y = a^x$ و $a > 1$

تابع

تعریف تابع لگاریتمی: لگاریتم یک عدد در یک پایه، برابر با توانی از پایه است که آن عدد را می دهد. بعنوان مثال لگاریتم ۱۰۰۰۰ در پایه ۱۰ میشه ۴ و بصورت $\log_{10} 10000 = 4$ نمایش داده میشه. خب توی محاسبات و ذخیره کردن اطلاعات برای ما خیلی راحتر هست که بجای ۱۰۰۰۰ از عدد ۴ استفاده کنیم و همین دلیل باعث تعریف تابع لگاریتم شد. در حالت کلی لگاریتم عدد a در پایه b برابر با توانی از b مثل c است که عدد a حاصل شود و بصورت زیر نوشته می شود:

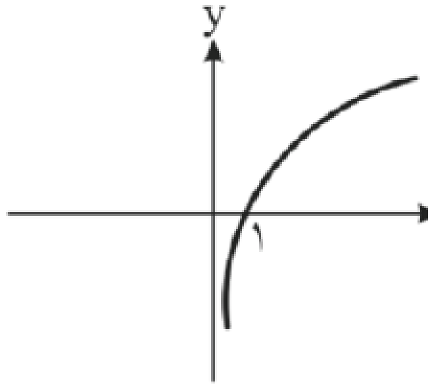
$$\log_b a = c \quad \Leftrightarrow \quad b^c = a$$

نکته: در تابع لگاریتمی $f(x) = \log_a x$ بایستی $a > 0$ و $a \neq 1$ و $x > 0$ (با توجه به نکات گفته شده در تابع نمایی این نکته واضح است).

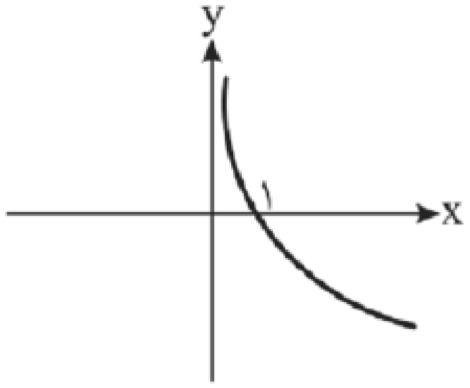
تابع

نمودار یک تابع لگاریتمی قرینه نمودار تابع نمایی نسبت به نیم ساز ربع اول و سوم می باشد که برای زمانیکه مقدار a بزرگتر و یا کوچتر از ۱ باشد بصورت زیر است

همانطور که از شکل واضح است برای مقادیر a بزرگتر از ۱ تابع صعودی و برای مقادیر کمتر از ۱ تابع نزولی می باشد. دامنه تابع $(\circ,\infty)$ و برد تابع برابر $\mathbb{R}$ است (شکل توابع نمایی و لگاریتمی را باید به خاطر بسپارید).



$y = \log_a^x$ ، $a > ۱$



$y = \log_a^x$ ، $\circ < a < ۱$

معادلات لگاریتمی

۱) $\log_a 1 = 0 \Leftrightarrow a^0 = 1$

۲) $\log_a a = 1 \Leftrightarrow a^1 = a$

۳) $\log_c ab = \log_c a + \log_c b$ (مهم ترین ویژگی لگاریتم)

۴) $\log_c \frac{a}{b} = \log_c a - \log_c b$

۵) $\log_b a^n = n \log_b a$

۶) $\log_{b^n} a = \frac{1}{n} \log_b a$

۷) $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$

۸) $\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$

۹) $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$

تابع

از تساوی $\log_x 5 = 1 + \log_x (x^2 + 4)$، مقدار لگاریتم x در پایه ۲ کدام است؟

۱) -1　　۲) $-\frac{1}{2}$　　۳) $-\frac{3}{2}$　　۴) ۲

$$\log_c ab = \log_c a + \log_c b \quad (\text{مهم ترین ویژگی لگاریتم})$$

تابع

حل: در حل تست های لگاریتمی اول از همه باید دامنه را مشخص نمود و بعد برای حل این تست باید عدد یک را نیز به صورت لگاریتمی بنویسیم

$$\log_x(x^2+4)=\log_x x+\log_x 5 \Rightarrow \log_x(x^2+4)=\log_x 5x \Rightarrow x^2+4=5x \Rightarrow x=1,4$$

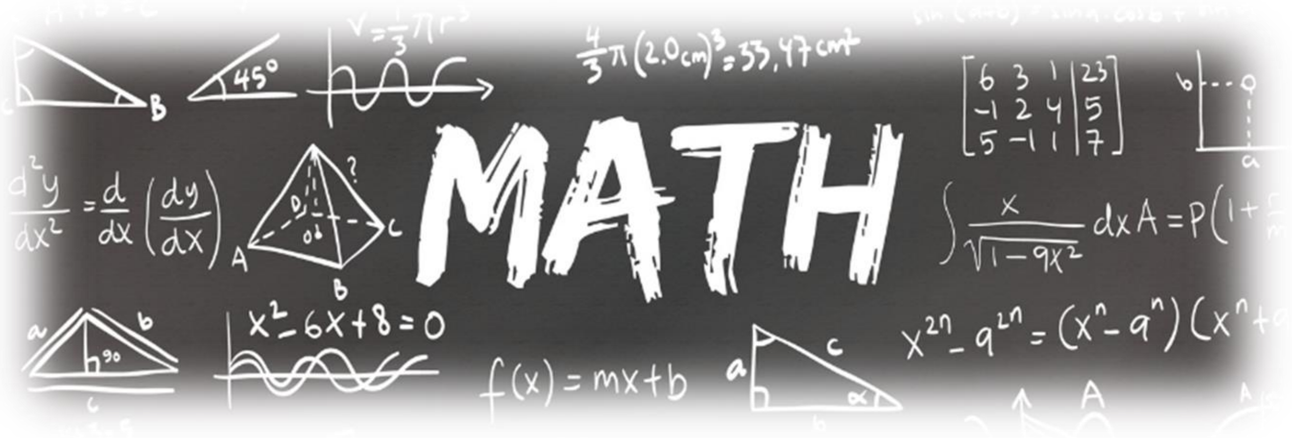
که مقدار ۱ در دامنه نمی باشد بنابراین برای ٤ لگاریتم در پایه ۲ می شود ۲.

$$\boxed{\log_c ab=\log_c a+\log_c b \left(\text{مهم ترین ویژگی لگاریتم}\right)}$$

دانشگاه جامع
علمی-کاربردی

شرکت حمل و نقل ریلی رجا
RAJA RAIL TRANSPORTATION CO.

دانشگاه جامع
علمی-کاربردی



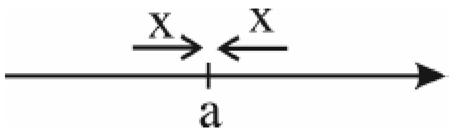
■ عنوان درس: **ریاضیات**

■ مدرس: **دکتر احمد رحمتی علائی**

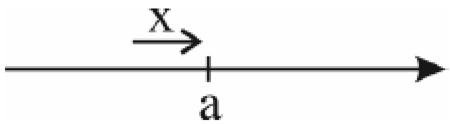
■ مبحث: **حد تابع**

مفهوم حد

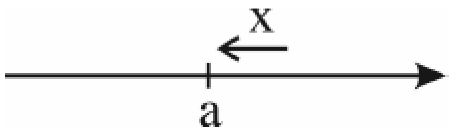
۱) وقتی می‌گوییم x میل می‌کند به سمت عدد a (و این‌جوی می‌نویسیمش: $x \to a$) منظورمان این است که x روی محور اعـداد در یـک همسایگی محذوف a بسیار به a نزدیک می‌شود، یعنی x تقریباً برابر a است؛ این شکلی:



۲) وقتی می‌گوییم x از سمت چپ به a میل می‌کند (که این‌جوری می‌نویسیمش: $x \to a^-$) منظورمان این است که x روی محور اعداد از سمت اعداد کوچک‌تر از a به آن نزدیک می‌شود؛ این شکلی:



۳) وقتی می‌گوییم x از سمت راست به a میل می‌کند (که این‌جوری می‌نویسیمش: $x \to a^+$) منظورمان این است که x روی محور اعداد از سمت اعداد بزرگ‌تر از a به آن نزدیک می‌شود؛ این شکلی:



مفهوم حد

فرض کنید $f(x) = 2x + 1$ تابعی باشد که تعریف کرده ایم. بنابراین :

$$f(3) = 2(3) + 1 = 7$$

که مطلب فوق واضح است.

حال اگر از شما بخواهند $f(2\cdot\overline{999})$ را به دست آورید میتوانید بگویید :

$$f(2\cdot\overline{999}) \cong 7$$

و اگر بخواهند $f(3\cdot\overline{000}1)$ را به دست آورید نیز می گویید :

$$f(3\cdot\overline{000}1) \cong 7$$

مفهوم حد

پس ازین به بعد باهم قرارداد میکنیم که

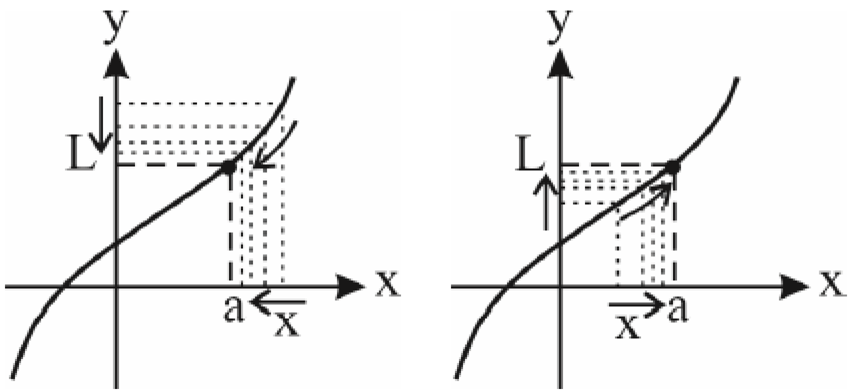
$$f(2\cdot\overline{999}) = \lim_{x\to 3^-} 2x+1 = 7$$

یعنی حد چپ تابع در $x = 3$ برابر با ۷ است. درواقع بدین معناست که اگر از سمت چپ(مقادیر کمتر از ۳) به ۳ نزدیک شویم مقدار تابع به ۷ نزدیک می شود.

$$f(3\cdot\overline{000}1) = \lim_{x\to 3^+} 2x+1 = 7$$

یعنی حد راست تابع در $x = 3$ برابر با ۷ است. بدین معنا که اگر از سمت راست(مقادیر بیشتر از ۳) به ۳ نزدیک شویم مقدار تابع به ۷ نزدیک می شود.

مفهوم حد

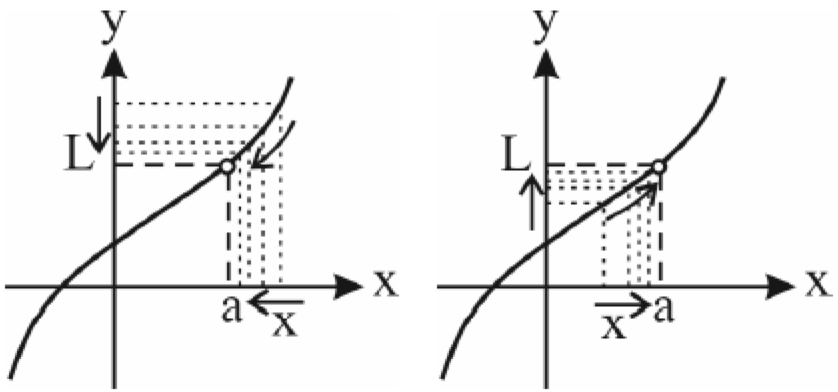


(الف)

تابع در همسایگی راست و چپ a تعریف شده

حد چپ = حد راست

تابع در $x = a$ حد دارد.



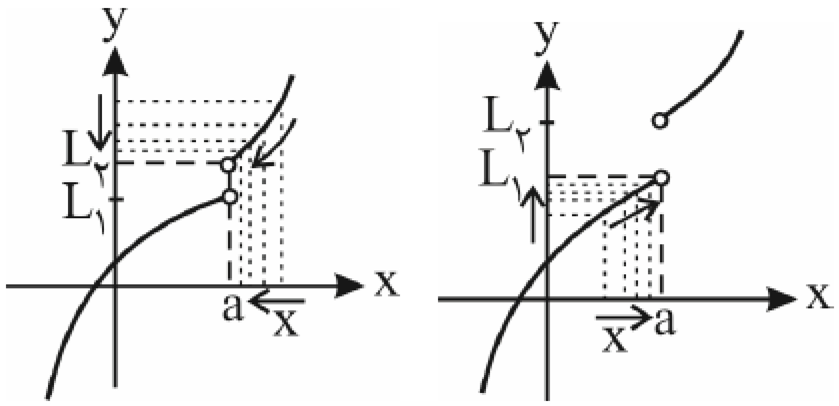
(ب)

تابع در همسایگی راست و چپ a تعریف شده

حد چپ = حد راست

تابع در $x = a$ حد دارد

مفهوم حد

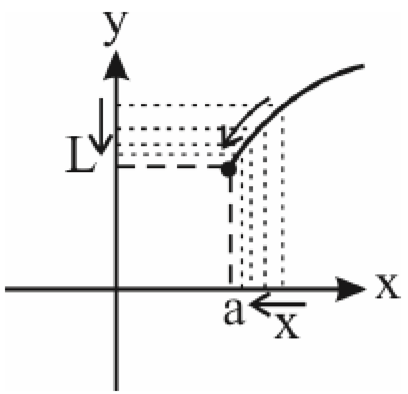


(پ)

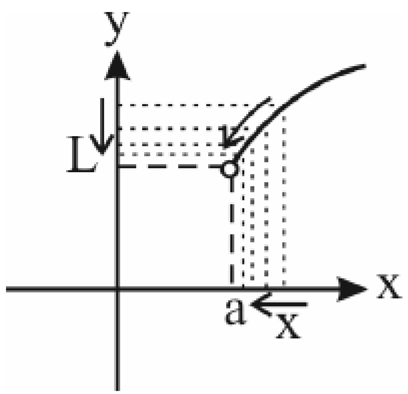
تابع در همسایگی راست و چپ a تعریف شده

حد چپ $\neq$ حد راست

تابع در $x = a$ حد ندارد.



(ت)

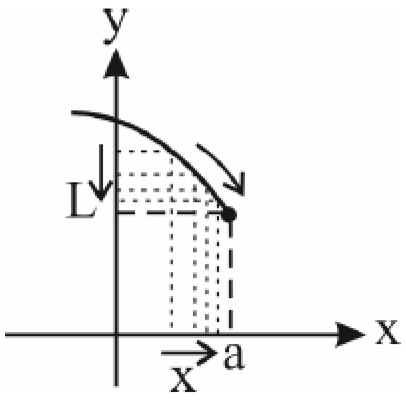


(ث)

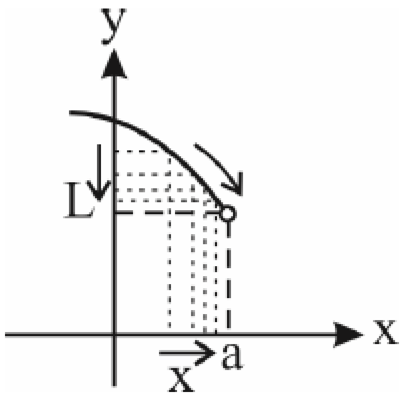
تابع در همسایگی راست a تعریف شده

تابع در $x = a$ حد راست دارد ولی کلاً در این نقطه حد ندارد.

مفهوم حد



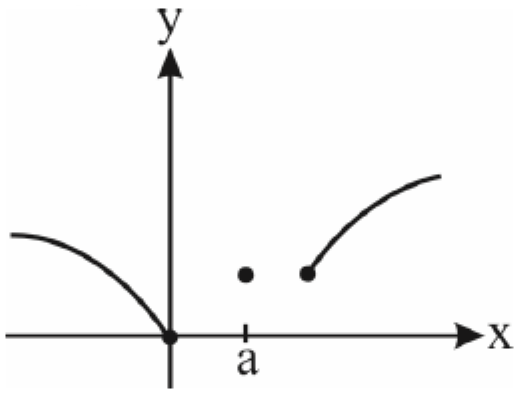
(ج)



(چ)

تابع در همسایگی چپ a تعریف شده

تابع در $x = a$ حد چپ دارد ولی کلاً در این نقطه حد ندارد.



(ح)

تابع در هیچ همسایگی a تعریف نشده و در $x = a$ حد ندارد.

وقتی می‌خواهیم ببینیم یک تابع وقتی $x \to a$ حد دارد یا نه، مهم‌ترین موضوع بررسی دامنه‌ی تابع است، البته لازم نیست تمام دامنه را پیدا کنیم. منظورمان این است که باید ببینیم آیا تابع در یک همسایگی راست یا چپ نقطه‌ی a تعریف شده یا نه، یعنی کافی است وضعیت تابع را در اطراف نقطه‌ی a بررسی کنیم.

مفهوم حد

وقتی x به سمت a میل می‌کند، حد تابع $f(x)$ برابر با L می‌شود و نمادگذاری زیر را داریم:

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

دقت کنید، در پیدا کردن حد $f(x)$ وقتی که x به سمت a میل می‌کند، هرگز حالتی را که $x = a$ است، در نظر نمی‌گیریم. در حقیقت حتی لازم نیست $f(x)$ در $x = a$ تعریف شده باشد، فقط مهم این است که در همسایگی محذوف a (یعنی در همسایگی و بسیار نزدیک a به جز خود a) تعریف شده باشد.

مفهوم حد

تعریف حدود چپ و راست

همان‌طور که در مفهوم حد گفتیم، در محاسبه‌ی حد یک تابع در نقطه‌ای مانند a، متغیر x می‌تواند از سمت چپ و یا از سمت راست به a نزدیک شود. وقتی می‌نویسیم $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=L$، منظورمان آن است که حد $f(x)$ وقتی x از سمت چپ به a میل می‌کند، برابر با L است و وقتی می‌نویسیم $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=L$ یعنی حد $f(x)$ وقتی x از سمت راست به a میل می‌کند، برابر با L است. نمادگذاری $x\to a^-$ یعنی فقط xهایی را در نظر می‌گیریم که از a کوچکترند و نمادگذاری $x\to a^+$ یعنی فقط xهایی را در نظر می‌گیریم که از a بزرگترند. با توجه به توضیحات گفته شده می‌توان نتیجه زیر را گرفت:

شرط لازم و کافی برای آن‌که $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ باشد، آن است که $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=L$ (یعنی شرط لازم و کافی برای وجود حد این است که حد چپ و حد راست، هر دو وجود داشته و با هم برابر باشند). گاهی اوقات حد راست و حد چپ را به‌صورت $f(a^+)$ و $f(a^-)$ می‌نویسیم.

مفهوم حد

ویژگی جایگذاری مستقیم در ضابطه‌ی تابع

اگر تابع $f(x)$ از نوع چندجمله‌ای، کسر گویا، مثلثاتی، هیپربولیک، رادیکالی، لگاریتمی و نظایر این‌ها باشد و $f(a)$ تعریف شده باشد، آن‌گاه داریم:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

یعنی برای پیدا کردن حد تابع $f(x)$ در نقطه‌ی $x = a$ **از دامنه‌ی f**، می‌توانیم در ضابطه‌ی f به جای x، **مقدار a را قرار دهیم**. به دو موضوع دقت کنید کـه اولاً a در دامنه $f(x)$ باشد و ثانیاً در همه توابع نمی‌توان مقدار تابع را با حد آن یکسان دانست؛ مثلاً توابعی مانند **جزء صحیح**، **قدر مطلق یا توابـع چندضـابطه‌ای** از جملـه توابعی هستند که لزوماً مقدار تابع با حد تابع در یک نقطه‌ی مشخص، یکسان نیست. در توابع **رادیکالی و لگاریتمی** نیز با توجه به دامنه‌ی تابع ممکن است مقدار حد فقط از **یک طرف** موجود باشد.

مفهوم حد

قواعد و قضایای حد

در این قسمت، ابتدا به تعدادی از قواعد و اعمال جبری بر روی حدود اشاره می‌کنیم و سپس به یکی از قضایای مهم حد می‌پردازیم. دقت کنید که همه‌ی این قضایا به شرطی برقرار هستند که $\lim_{x\to a} f(x)=L_1$ و $\lim_{x\to a} g(x)=L_2$ هر دو موجود باشند:

۱ـ حد مجموع (تفاضل)، برابر با مجموع (تفاضل) حدهاست:

$$\lim_{x\to a}[f(x)\pm g(x)]=\lim_{x\to a} f(x)\pm \lim_{x\to a} g(x)=L_1\pm L_2$$

۲ـ ضریب ثابت C می‌تواند از حد خارج شود:

$$\lim_{x\to a}(Cf(x))=C\lim_{x\to a} f(x)=CL_1$$

مفهوم حد

۳ـ حد حاصل‌ضرب، برابر با حاصل‌ضرب حدهاست:

$$\lim_{x\to a} f(x)g(x) = \lim_{x\to a} f(x) \times \lim_{x\to a} g(x) = L_1 L_2$$

۴ـ حد نسبت، برابر با نسبتِ حدهاست (به شرطی که حد مخرج صفر نباشد):

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \frac{L_1}{L_2} \quad , \quad (\lim_{x\to a} g(x) \neq 0 \text{ باشرط})$$

۵ـ $\lim_{x\to a} [f(x)]^n = [\lim_{x\to a} f(x)]^n$ که n یک عددی طبیعی است.

مفهوم حد

۶ـ اگر حد $f(x)$ در $x=a$ موجود باشد، حد $|f(x)|$ نیز در این نقطه وجود دارد و خواهیم داشت: $|\lim\limits_{x\to a} f(x)| = \lim\limits_{x\to a} |f(x)|$ ، اما عکس این مطلب صحیح نیست. مثلاً در تابع علامت $f(x)=\operatorname{sgn} x$ حد $|f(x)|$ در $x=0$ برابر با یک است، اما حد $f(x)$ وجود ندارد.

۷ـ $\lim\limits_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x\to a} f(x)}$ که n یک عدد طبیعی است و اگر زوج باشد، باید مقدار $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ نامنفی باشد.

۸ـ اگر به ازای هر x نزدیک a ، نامساوی $f(x)\le g(x)$ برقرار باشد، آن‌گاه داریم:

$$\lim_{x\to a} f(x) \le \lim_{x\to a} g(x)$$

مفهوم حد

مثال: حد تابع $y = x^2 + 5$ را در $x = 1$ بیابید.

$$\lim_{x\to 1} x^2 + 5 = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^+} x^2 + 5 = (1^+)^2 + 5 = 6 \\ \lim\limits_{x\to 1^-} x^2 + 5 = (1^-)^2 + 5 = 6 \end{cases} \to \lim_{x\to 1} x^2 + 5 = 6$$

مفهوم حد

مثال: حد تابع $y = [x]$ را در $x = 2$ بیابید.

$$\lim_{x\to 2}[x] = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^+}[x] = [2^+] = 2 \\ \lim\limits_{x\to 2^-}[x] = [2^-] = 1 \end{cases} \rightarrow \text{حد ندارد}$$

مثال: حد تابع $y = [x]$ را در $x = 2\cdot 5$ بیابید.

$$\lim_{x\to 2}[x] = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 2\cdot 5^+}[x] = [2\cdot 5^+] = 2 \\ \lim\limits_{x\to 2\cdot 5^-}[x] = [2\cdot 5^-] = 2 \end{cases} \rightarrow \lim_{x\to 2\cdot 5}[x] = 2$$

مفهوم حد

مثال: حد تابع $y = \frac{|x|}{x}$ را در $x = 0$ بیابید.

$$\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x} = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{|x|}{x} = \dfrac{x}{x} = 1 \\ \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{|x|}{x} = \dfrac{-x}{x} = -1 \end{cases} \rightarrow \text{حد ندارد}$$

مفهوم حد

نکته ۲ :در توابعی که خطی هستند(فاقد براکت یا قدرمطلق یا ....) دیگر لازم نیست که حد چپ و راست را جداگانه محاسبه کنیم و می‌توانیم با جایگذاری، مقدار حد را به دست آوریم.

نکته ۳: در توابع دارای براکت و قدر و امثال اینها حتما باید حد چپ و راست را جداکانه حساب کنیم.

نکته ۴: تابع براکت زمانی که عبارت داخل آن صحیح باشد حد ندارد.

مفهوم حد

مثال۱: به ازای کدام مقدار a حد تابع با ضابطه $f(x)=\begin{cases} ax^{۲}+bx-۱ & ; x\geq ۲ \\ \dfrac{ax+۵}{bx-۱} & ; x<۲ \end{cases}$ در نقطه $x=۲$ ، برابر ۹ است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) $\frac{۳}{۲}$

مفهوم حد

$$f(x)=\begin{cases} ax^{۲}+bx-۱ \; ; \; x\ge ۲ \\ \dfrac{ax+۵}{bx-۱} \qquad ; \; x<۲ \end{cases}$$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» برای وجود حد باید حد چپ و راست تابع برابر ۹ باشد. دقت کنید $۲^{+} > ۲$ در نتیجه $f(x)=ax^{۲}+bx-۱$ برای محاسبه حد راست مورد استفاده قرار می‌گیرد ولی $۲^{-} < ۲$ لذا $f(x)=\dfrac{ax+۵}{bx-۱}$ برای محاسبه‌ی حد چپ مورد استفاده قرار می‌گیرد.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to ۲^{+}} f(x)=\lim\limits_{x\to ۲^{+}}(ax^{۲}+bx-۱)=۴a+۲b-۱=۹ \\ \lim\limits_{x\to ۲^{-}} f(x)=\lim\limits_{x\to ۲^{-}}\dfrac{ax+۵}{bx-۱}=\dfrac{۲a+۵}{۲b-۱}=۹ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۴a+۲b=۱۰ \\ ۲a+۵=۱۸b-۹ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۲a+b=۵ \\ a-۹b=-۷ \end{cases}$$

از حل دستگاه فوق $a=۲$ و $b=۱$ به دست می‌آید.

شرکت حمل و نقل ریلی رجا
RAJA RAIL TRANSPORTATION CO.
دانشگاه جامع علمی-کاربردی

مثال ۲: اگر $a - b = ۱$ و $b > ۰$ باشد، حد تابع $f(x) = \begin{cases} ax^۲ + bx - ۱ \; ; & x \geq ۲ \\ \dfrac{ax + ۵}{bx - ۱} \; ; & x < ۲ \end{cases}$ در نقطه $x = ۲$ در صورت وجود کدام است؟

۱) ۶ ‏‏ ۲) ۷ ‏‏ ۳) ۸ ‏‏ ۴) ۹

مفهوم حد

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» از رابطه‌ی $a = b+1$، ضابطه تابع f به صورت $f(x) = \begin{cases} (b+1)x^2 + bx - 1 & ; \ x \geq 2 \\ \dfrac{(b+1)x+5}{bx-1} & ; \ x < 2 \end{cases}$ در می‌آید. برای داشتن حد در نقطه $x = 2$ لازم است حد چپ و راست با هم برابر باشند، بنابراین داریم:

چون $2^+ > 2$ در نتیجه ضابطه‌ی (۱) را در نظر گرفتیم.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} ((b+1)x^2 + bx - 1) = (b+1)4 + 2b - 1 = 6b + 3 \\ \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{(b+1)x+5}{bx-1} = \dfrac{2b+7}{2b-1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{2b+7}{2b-1} = 6b+3 \Rightarrow 2b+7 = 12b^2 - 3 \Rightarrow 12b^2 - 2b - 10 = 0 \Rightarrow 6b^2 - b - 5 = 0$$

از حل معادله درجه دوم فوق b برابر $\frac{-5}{6}$ و ۱ به دست می‌آید که با توجه به فرض $b > 0$، فقط $b = 1$ قابل قبول است. به ازای $b = 1$ حد تابع f در $x = 2$ برابر است با:

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 6b + 3 = 9$$

مفهوم حد

بازه های به صورت $(a-\delta\ ,\ a+\delta)$ را که δ عددی مثبت است را یک **همسایگی** a می نامند. اگر a را از این همسایگی حذف کنیم آن را یک **همسایگی محذوف** a می نامند.

شرط آن که بتوان از حد چپ یک تابع در نقطه ای مانند a صحبت کرد آن است که آن تابع در یک همسایگی چپ a تعریف شده باشد.

به طور مشابه، شرط آن که بتوان از حد راست یک تابع در نقطه ای مانند a صحبت کرد آن است که آن تابع در یک همسایگی راست a تعریف شده باشد.

صفر حدی (0^+ و 0^-) ، $+\infty$، $-\infty$ و صفر مطلق

ما در فصل حد بیشتر با **صفر حدی** سروکار داریم. اما گاهی اوقات با سؤالاتی روبه‌رو می‌شویم که در آن‌ها صفر، حدی نیست و **صفر مطلق** (صفر واقعی) است. مثلاً تقسیم یک عدد بر «صفر حدی» برابر با ∞ می‌شود و تقسیم آن عدد بر «صفر مطلق» تعریف نشده است. اما صفر مطلق معمولاً چه زمانی پدید می‌آید!؟ به مثال مقابل توجه کنید:

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x}{\lfloor x-1\rfloor}=\frac{1}{\lfloor 1^+-1\rfloor}=\frac{1}{\lfloor \text{عددی بسیار کوچک و البته مثبت}\rfloor}=\frac{1}{\text{صفر مطلق}}=\text{تعریف نشده}$$

در واقع، وقتی در محاسبات نهایی به جزء صحیح عددی کمی بزرگ‌تر از صفر می‌رسیم، قطعاً خروجی برابر با صفر مطلق (واقعی) می‌شود. اما به مثال زیر توجه کنید:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x}{x-1}\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x}{x-1}=\dfrac{1}{1^+-1}=\dfrac{1}{1^+-1}=\dfrac{1}{\text{عدد مثبت و بسیار کوچک}}=\dfrac{1}{0^+}\\[2ex]\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x}{x-1}=\dfrac{1}{1^--1}=\dfrac{1}{\text{عدد منفی و بسیار نزدیک به صفر}}=\dfrac{1}{0^-}\end{cases}$$

صفر حدی (0^+ و 0^-) ، $+\infty$، $-\infty$ و صفر مطلق

در این‌جا صفر ما، حدی است و حاصل برابر با $+\infty$ یا $-\infty$ می‌شود. در واقع در حالت حدی، صفر موجود در مخرج یا 0^- است یا 0^+ که اگر 0^- باشد، آن‌گاه $\frac{1}{0^-}=-\infty$ و اگر 0^+ باشد، آن‌گاه $\frac{1}{0^+}=+\infty$ می‌شود. برای نمونه چند حالت مهم که ممکن است در سؤالات با آن‌ها روبه‌رو شویم، در زیر آورده شده است:

$$\frac{\text{عدد}}{\text{صفر حدی}}=\pm\infty \qquad \frac{\text{صفر مطلق}}{\text{صفر حدی}}=\text{صفر مطلق} \qquad \frac{\text{صفر حدی}}{\text{صفر مطلق}}=\text{تعریف نشده} \quad ، \quad \frac{\text{عدد}}{\text{صفر مطلق}}=\text{تعریف نشده}$$

صفر حدی (0^+ و 0^-) ، $+\infty$، $-\infty$ و صفر مطلق

توجه۱: گاهی اوقات 0^+ را با $\varepsilon+$ (اِپسیلَن) و 0^- را با $\varepsilon-$ نشان می‌دهیم. در اینجا «اِپسیلَن» به معنای یک عدد مثبت بسیار کوچک و در حال نزدیک شدن به صفر است.

توجه۲: برای درک بهتر مفاهیم حد باید دو نقطه‌ی فرضی $+\infty$ و $-\infty$ را به مجموعه $\mathbb{R}$ اضافه کنیم. این نقاط خواص زیر را دارند:

۱) $+\infty$ و $-\infty$ قرینه یکدیگر نیستند، یعنی $(+\infty)+(-\infty)$ لزوماً صفر نمی‌شود.

۲) به ازای هر $a \in \mathbb{R}$ داریم:

$$\begin{cases} a+(+\infty)=+\infty \quad , \quad a-(+\infty)=-\infty \quad , \quad \dfrac{a}{-\infty}=0 \\ a+(-\infty)=-\infty \quad , \quad a-(-\infty)=+\infty \quad , \quad \dfrac{a}{+\infty}=0 \\ +\infty+\infty=+\infty \ , \ (+\infty)(-\infty)=(-\infty)(+\infty)=-\infty \ , \ (+\infty)(+\infty)=(-\infty)(-\infty)=+\infty \end{cases}$$

صفر حدی (0^+ و 0^-) ، $+\infty$، $-\infty$ و صفر مطلق

۳) اگر $a > 0$ باشد، آن‌گاه: $a\times(-\infty)=-\infty \quad , \quad a\times(+\infty)=+\infty$

۴) اگر $a < 0$ باشد، آن‌گاه: $a\times(-\infty)=+\infty \quad , \quad a\times(+\infty)=(-\infty)$

۵) اگر $a > 1$ باشد، آن‌گاه $a^{+\infty}=+\infty$ و $a^{-\infty}=0$ و اگر $0 < a < 1$، آن‌گاه $a^{+\infty}=0$ و $a^{-\infty}=+\infty$

مفهوم حد

مثال ۳: حد راست تابع $f(x)=\dfrac{2x-1}{\dfrac{1}{4^x}+2}$ در نقطه $x=0$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) صفر ۳) ۱ ۴) $\frac{1}{2}$

پاسخ: گزینه «۲» چون حد راست تابع خواسته شده است در نتیجه مقدار $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ را باید حساب کنیم وقتی $x\to 0^+$ آن‌گاه $\frac{1}{x}\to +\infty$ در نتیجه $4^{\frac{1}{x}}\to +\infty$:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{2x-1}{\dfrac{1}{4^x}+2}=\frac{0-1}{4^{+\infty}+2}=\frac{-1}{+\infty}=0$$

مفهوم حد

مثال۴: مقدار $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{5e^{\frac{1}{x}} - 3e^{-\frac{1}{x}}}{2e^{\frac{1}{x}} + 5e^{-\frac{1}{x}}}$ برابر است با:

۱) $-\dfrac{3}{5}$

۲) 0

۳) $\dfrac{5}{2}$

۴) $+\infty$

مفهوم حد

$$\lim_{x \to ٠^+} \frac{۵e^{\frac{۱}{x}} - ۳e^{-\frac{۱}{x}}}{۲e^{\frac{۱}{x}} + ۵e^{-\frac{۱}{x}}}$$

پاسخ: گزینه «۳» وقتی $x \to ٠^+$ آن‌گاه $\frac{۱}{x} \to +\infty$ در نتیجه $e^{\frac{۱}{x}} \to +\infty$ و وقتی $x \to ٠^+$ آن‌گاه $\frac{۱}{x} \to +\infty$ در نتیجه $\left(\frac{۱}{x}\right)^{-۱} \to ٠^+$

با توجه به توضیحات داده شده حد تابع را حساب می‌کنیم:

$$\lim_{x \to ٠^+} \frac{۵e^{\frac{۱}{x}} - ۳e^{-\frac{۱}{x}}}{۲e^{\frac{۱}{x}} + ۵e^{-\frac{۱}{x}}} = \lim_{x \to ٠^+} \frac{۵e^{\frac{۱}{x}}}{۲e^{\frac{۱}{x}}} = \frac{۵}{۲}$$

مفهوم حد

در چه نوع حدودی حتماً لازم است هم حد چپ و هم حد راست را حساب کنیم؟

در این قسمت می‌خواهیم دسته‌بندی مشخصی از حدودی را ارائه کنیم که در آن‌ها باید هم حد چپ و هم حد راست را به طور جداگانه حساب کنیم.

۱) **در توابع چندضابطه‌ای وقتی حد تابع در نقاط روی مرز، سؤال شده باشد.** در این حالت‌ها ممکن است حد چپ و حد راست با هم یکسان نباشد.

۲) **در توابع رادیکالی که فرجه رادیکال زوج است.** وقتی فرجه رادیکال زوج است زیر رادیکال نمی‌تواند مقداری منفی باشد، به همین دلیل در این توابع ممکن است یکی از حدود چپ و یا راست وجود نداشته باشد.

به مثال مقابل توجه کنید:

$$\lim_{x\to ۲}\sqrt{x^{۲}-۴}=\begin{cases}\lim\limits_{x\to ۲^+}\sqrt{x^{۲}-۴}=\sqrt{۴^+-۴}=\sqrt{۰^+}=۰\\ \lim\limits_{x\to ۲^-}\sqrt{x^{۲}-۴}=\sqrt{۴^--۴}=\sqrt{۰^-}=\text{وجودندارد}\end{cases}\Rightarrow \text{حد در } x=۲ \text{ وجود ندارد}$$

مفهوم حد

۳) **در توابع کسری وقتی مخرج کسر به سمت صفر میل می‌کند.** در این‌گونه سؤالات اگر مخرج ریشه مرتبه فرد داشته باشد، آن‌گاه هر یک از حدود چپ و راست مختلف‌العلامه می‌شوند. یعنی یکی $+\infty$ و دیگری $-\infty$ خواهد شد و اگر مخرج کسر ریشه مرتبه زوج داشته باشد، هر دو حد چپ و راست برابر $+\infty$ یا هر دو حد برابر با $-\infty$ خواهد شد. به مثال‌های زیر توجه کنید:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} tgx = \begin{cases} \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+} (tgx) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} (tgx) = +\infty \end{cases} \Rightarrow \text{حد وجود ندارد}$$

و

$$\lim_{x\to\frac{1}{3}} \left(\frac{6x+2}{3x-1}\right) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to\frac{1}{3}^+} \left(\frac{6x+2}{3x-1}\right) = \frac{4}{0^+} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to\frac{1}{3}^-} \left(\frac{6x+2}{3x-1}\right) = \frac{4}{0^-} = -\infty \end{cases} \Rightarrow \text{حد وجود ندارد}$$

در محاسبه‌ی حد tgx توجه کنید که وقتی $x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^+$، آن‌گاه x در ربع دوم قرار دارد بنابراین علامت بی‌نهایت با توجه به علامت tgx در ربع دوم تعیین می‌شود

که می‌دانیم منفی است. به همین ترتیب وقتی $x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-$ یعنی در ربع اول قرار داریم و می‌دانیم علامت tg در ربع اول مثبت است، بنابراین $+\infty$ قرار دادیم.

مفهوم حد

۴) در توابع شامل قدرمطلق وقتی حد تابع در نقاطی مد نظر باشد که این نقاط ریشه‌های عبارت داخل قدرمطلق هستند.

۵) در توابع شامل جزء صحیح، وقتی حد تابع در نقاطی مدنظر باشد که عبارت داخل جزء صحیح، مقدار صحیح پیدا می‌کند.

مفهوم حد

مثال ۵: مقدار حد تابع با ضابطه $f(x)=\frac{|x-۲|}{x-۲}$ وقتی $x \to ۲$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱- ۳) ۰ ۴) حد ندارد

مفهوم حد

☑ **پاسخ :** گزینه «۴» چون $x = ۲$ ریشه ساده داخل قدرمطلق است باید حد چپ و راست تابع را در $x = ۲$ حساب کنیم. وقتی x از سمت راست به ۲ نزدیک می‌شود، $x - ۲$ ، مقدارش مثبت می‌شود و با توجه به تعریف قدرمطلق نتیجه می‌گیریم $|x-۲| = x-۲$ و به همین ترتیب وقتی x از سمت چپ به ۲ نزدیک می‌شود « $x - ۲$ » مقدارش منفی می‌شود و با توجه به تعریف قدرمطلق خواهیم داشت $|x-۲| = -(x-۲)$ چون حد راست و چپ با هم برابر نیستند.

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to ۲^+}\frac{|x-۲|}{x-۲} &= \lim_{x\to ۲^+}\frac{x-۲}{x-۲} = ۱ \\ \lim_{x\to ۲^-}\frac{|x-۲|}{x-۲} &= \lim_{x\to ۲^-}\frac{-(x-۲)}{x-۲} = -۱ \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\text{حد راست} \neq \text{حد چپ}} \text{تابع در نقطه } x = ۲ \text{ حد ندارد.}$$

مفهوم حد

مثال ۶: حاصل $A = \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{\lfloor x \rfloor}{x}$ کدام است؟

۱) $-\infty$ ۲) -1 ۳) 1 ۴) $+\infty$

مفهوم حد

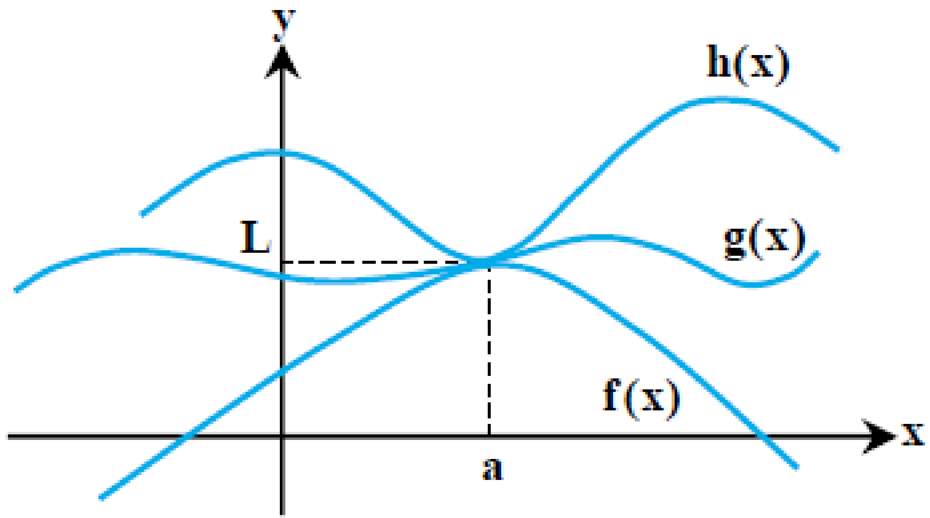
☑ **پاسخ:** گزینه «۴» علامت منفی صورت کسر را در علامت مخرج کسر که منفی می‌باشد ضرب می‌کنیم.

$$A = \lim_{x \to 0^-} \frac{\lfloor \text{عددی کوچکتر از ۰ و خیلی نزدیک به صفر} \rfloor}{\text{عددی کوچکتر از ۰ و خیلی نزدیک به صفر}} = \frac{-1}{-\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon} = \frac{1}{\text{عددی مثبت و بسیار کوچک}} = +\infty$$

مفهوم حد

■ قضیه فشردگی (ساندویچ):

قضیه: فرض کنیم نامساوی $f(x) \le g(x) \le h(x)$ به ازای هر x در یک فاصله باز شامل a (به جز احتمالاً در خودِ $x = a$) برقرار باشد، همچنین $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = L$ ، در این صورت حتماً $\lim\limits_{x\to a} g(x) = L$ است.



مفهوم حد

قضیه فشردگی (ساندویچ):

برای مثال اگر به ازای هر $x \neq ۰$ نامساوی $۳ - x^۲ \leq g(x) \leq ۳ + x^۲$ برقرار باشد، آن‌گاه $\lim_{x \to ۰} g(x)$ برابر با ۳ است، چون داریم:

$$\lim_{x \to ۰} h(x) = \lim_{x \to ۰} (۳ + x^۲) = ۳ \quad , \quad \lim_{x \to ۰} f(x) = \lim_{x \to ۰} (۳ - x^۲) = ۳ \quad \Rightarrow \lim_{x \to ۰} g(x) = ۳$$

مفهوم حد

نتیجه قضیه فشردگی: یکی از نتایج مهم قضیه فشردگی که در حل سؤالات کاربرد زیادی دارد، به‌صورت زیر است:

«هرگاه $\lim_{x\to a} f(x)=0$ و $g(x)$ در یک همسایگی محذوف a کران‌دار باشد (بی‌نهایت نشود)، آن‌گاه $\lim_{x\to a} f(x)g(x)=0$ خواهد بود.»

برای مثال حاصل حد $\lim_{x\to 0} x^2 \sin\frac{1}{x}$ برابر با صفر است. چون در اینجا $\lim_{x\to 0} x^2=0$ و از طرفی تابع $\sin\frac{1}{x}$ به این دلیل که $-1\le \sin\frac{1}{x}\le 1$، تابعی کران‌دار است و بنا بر نتیجه قضیه فشردگی داریم:

$$\lim_{x\to 0} x^2 \sin\frac{1}{x} = \text{صفر} \times (\text{منظور } \sin\frac{1}{x} \text{ است بین ۱ و } -1) = \text{صفر} \times (\text{منظور } \sin\frac{1}{x} \text{ است}) = 0$$

مفهوم حد

مثال ۱۷: اگر $\frac{x^2}{x^2+1} < f(x) < \frac{2x^2}{x^2+1}$ ، آنگاه $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۰ ۳) ۲ ۴) نامعلوم

پاسخ: گزینه «۲» با توجه به این که:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2+1}=\frac{0}{0+1}=0\ ,\ \lim_{x\to 0}\frac{2x^2}{x^2+1}=\frac{0}{0+1}=0$$

طبق قضیه ساندویچ حد تابع وسط نیز برابر صفر می‌شود، یعنی: $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$.

مفهوم حد

نکته۱: توابع $\sin x$ و $\cos x$ وقتی $x \to \infty$ حد ندارند، چون $\sin \infty$ و $\cos \infty$ اعداد مشخص نیستند و در واقع عددی نامشخص بین ۱− و ۱ می‌باشند.

نکته۲: توابع $\sin \frac{1}{x}$ و $\cos \frac{1}{x}$ وقتی $x \to 0$ حد ندارند، چون وقتی $x \to 0$، آنگاه $\frac{1}{x}$ به سمت بی‌نهایت میل می‌کند.

مفهوم حد

حالت مبهم $\frac{0}{0}$

در این درسنامه و درسنامه‌های بعدی با حدودی روبه‌رو می‌شویم که تعیین حاصل دقیق آن‌ها پس از جایگذاری مستقیم امکان ندارد. در واقع نمی‌توانیم بلافاصله پس از جایگذاری بگوییم حاصل حد برابر با چه عددی است. حتی نمی‌توانیم بگوییم حاصل‌شان $+\infty$ یا $-\infty$ می‌شود. برای روشن شدن مطلب به مثال‌های زیر توجه کنید:

$$1)\ \lim_{x\to 0}\frac{2x}{x}=2\quad,\quad 2)\ \lim_{x\to 0}\frac{x}{x^2}=\infty\quad,\quad 3)\ \lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x^2}=0$$

در هر سه مثال فوق، پس از جایگذاری $x=0$، به حالت $\frac{0}{0}$ می‌رسیم. اما همان‌طور که می‌بینید حاصل این حدود با هم فرق می‌کند. این‌که چطور حاصل این حدود محاسبه شده، فعلاً مهم نیست! بحث ما فهمیدن این موضوع است که چرا می‌گوییم حاصل حد مبهم است. در واقع ما نمی‌دانیم وقتی «صفر حدی» بر «صفر حدی» تقسیم می‌شود، حاصل چه می‌شود. البته حالت $\frac{0}{0}$ تنها حالت مبهم در حدود نیست. به طور کلی هفت حالت مختلف داریم که به آن‌ها «صور مبهم» گفته می‌شود که به‌صورت مقابل است: 1^{∞}، ∞^0، 0^0، $0\times\infty$، $\infty-\infty$، $\frac{\infty}{\infty}$، $\frac{0}{0}$.

اکنون به بررسی جداگانه هر یک از این حالات هفت‌گانه می‌پردازیم.

رفع ابهام از حالت مبهم $\frac{0}{0}$

این حالت یکی از پرتکرارترین صورت‌های مبهم می‌باشد که در حدود با آن برخورد می‌کنیم. در حالت کلی اگر حدی به شکل $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ داشته باشیم که وقتی $x\to a$، آن‌گاه $f(x)\to 0$ و $g(x)\to 0$ در این صورت با حالت مبهم $\frac{0}{0}$ روبه‌رو هستیم و برای رفع ابهام در این حالت، روش‌های مختلفی وجود دارد که به آن‌ها اشاره می‌کنیم:

۱) حذف عامل مزاحم یکی از روش‌هایی که کمتر مورد استفاده قرار می‌گیرد، حذف عامل مبهم‌کننده (مثلاً حذف عامل صفرشونده) با استفاده از تجزیه و اتحادهای جبری است. به مثال زیر توجه کنید:

مثال ۱۸: **حد تابع $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}$ را حساب کنید.**

☑ **پاسخ:** به ازای $x=1$ کسر به صورت مبهم $\frac{0}{0}$ در می‌آید. در نتیجه عامل مبهم‌کننده $x-1$ است برای رفع ابهام باید عامل مبهم‌کننده را در صورت و مخرج کسر پدید بیاوریم و با حذفشان در مرحله بعد عمل حدگیری را انجام می‌دهیم.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x^2+x+1)=1+1+1=3$$

مفهوم حد

رفع ابهام از حالت مبهم $\frac{0}{0}$

۲) استفاده از قاعده هوپیتال همیشه شناسایی عامل مزاحم کار راحتی نیست و یا حداقل پس از شناسایی به راحتی نمی‌توان آن را حذف کرد. در این قسمت به یکی از پرکاربردترین روش‌ها در محاسبه‌ی حد توابع $\frac{0}{0}$ اشاره می‌کنیم که نیاز به دانستن قوانین مشتق‌گیری دارد

مفهوم حد

اگر $f(x) = ۲^{\frac{۱}{x}}$ و $g(x) = \frac{۲x - ۳}{x + ۱}$، آنگاه $\lim\limits_{x \to ۰^-} (gof)(x)$ کدام است؟

۱) -۳

۲) -۱

۳) $\frac{۳}{۲}$

۴) ۲

مفهوم حد

ضابطهٔ $gof(x)$ یا همان $g(f(x))$ را تشکیل می دهیم. حد تابع $g(f(x))$ را وقتی $x \to 0^-$، به دست می آوریم. دقت کنید اگر در محاسبهٔ حد به عدد $a^{-\infty}$ که در آن $a > 1$ است برخوردیم حاصل برابر صفر می شود.

$$gof(x) = g(f(x)) = \frac{2(2^{\frac{1}{x}}) - 3}{2^{\frac{1}{x}} + 1}$$

$$\lim_{x \to 0^-} gof(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{2(2^{\frac{1}{x}}) - 3}{2^{\frac{1}{x}} + 1}$$

$$\xrightarrow{x \to 0^- \Rightarrow \frac{1}{x} \to -\infty} \lim_{x \to 0^-} gof(x) = \frac{2(2^{-\infty}) - 3}{(2^{-\infty}) + 1} = \frac{(2 \times 0) - 3}{0 + 1} = \frac{-3}{1} = -3$$

مفهوم حد

حاصل $\lim\limits_{x \to -\infty} x \left[\frac{1}{x}\right]$ کدام است؟

۱) صفر

۲) ۱

۳) $+\infty$

۴) $-\infty$

مفهوم حد

ابتدا وقتی $x \to -\infty$، حاصل $\left[\frac{1}{x}\right]$ را به دست می آوریم. با داشتن مقدار $\left[\frac{1}{x}\right]$ حاصل حد را محاسبه می کنیم.

$$x \to -\infty \Rightarrow \frac{1}{x} \to 0^- \Rightarrow \left[\frac{1}{x}\right] = [0^-] = -1$$

$$\lim_{x \to -\infty} x\left[\frac{1}{x}\right] = (-\infty)(-1) = +\infty$$

مفهوم حد

در محاسبه‌ی حد چندجمله‌ای‌ها وقتی $x \to +\infty$ یا $x \to -\infty$ خواهیم داشت، (n عددی صحیح و مثبت است)

$$\lim_{x\to\pm\infty}(ax^n + bx^{n-1} + ... + L) = \lim_{x\to\pm\infty} ax^n(1 + \frac{b}{ax} + ... + \frac{L}{ax^n})$$

چون حد $\frac{b}{ax}$ و ... تا $\frac{L}{ax^n}$ وقتی $x \to \pm\infty$ صفر است پس،

$$\lim_{x\to\pm\infty}(ax^n + bx^{n-1} + ... + L) = \lim_{x\to\pm\infty} ax^n$$

یعنی حد چندجمله‌ای وقتی $x \to \pm\infty$ ، مساوی حد جمله‌ای است که دارای بزرگ‌ترین درجه است.

به عنوان مثال،

$$\lim_{x\to-\infty}(3x^3 - x^2 + 2) = \lim_{x\to-\infty} 3x^3 = -\infty$$

مفهوم حد

رفع ابهام $\frac{\infty}{\infty}$

الف) برای محاسبه‌ی حد کسر $\frac{f(x)}{g(x)}$ که در آن $f(x)$ و $g(x)$ دو چند جمله‌ای از x می‌باشند، وقتی $x \to \pm\infty$ خواهیم داشت،

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} + \cdots}{a'x^n + b'x^{n-1} + c'x^{n-2} + \cdots} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{ax^m}{a'x^n}$$

برای محاسبه‌ی حد این کسر وقتی $x \to \pm\infty$ خواهیم داشت،

۱) $m < n \Rightarrow \lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = ۰$

مثال : $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{۲x+۱}{۳x^۲+۲} = ۰$

۲) $m = n \Rightarrow \lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{a'}$

مثال : $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{۲x+۵}{۳x+۷} = \frac{۲}{۳}$

۳) $m > n \Rightarrow \lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$ یا $-\infty$ یا $\pm\infty$

مثال : $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{۲x^۳-x^۲+۱}{x^۲+۷} = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{۲x^۳}{x^۲} = -\infty$

مفهوم حد

حد کسر $\dfrac{x^{m+۳}+nx+m}{mx^{n-۲}-mx+n-۱}$ با شرط $n>۳$، وقتی $x\to\infty$ برابر ۲- است. $n+m$ کدام است؟

۱) ۳/۵ ۲) ۴

۳) ۴/۵ ۴) ۵

مفهوم حد

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^{m+3}+nx+m}{mx^{n-2}-mx+n-1}=-2$$

باتوجه‌به اینکه صورت و مخرج کسر، یک عبارت چندجمله‌ای است، پس حاصل حد از تقسیم بزرگ‌ترین جملهٔ صورت بر بزرگ‌ترین جملهٔ مخرج به دست می‌آید؛ یعنی:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^{m+3}+nx+m}{mx^{n-2}-mx+n-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^{m+3}}{mx^{n-2}}=-2$$

حاصل حد یک عدد ثابت شده است، پس داریم: $m+3=n-2$

بنابراین:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^{m+3}}{mx^{n-2}}=\frac{1}{m}=-2\Rightarrow m=-\frac{1}{2}$$

$$m+3=n-2\xrightarrow{m=-\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}+3=n-2\Rightarrow n=-\frac{1}{2}+5=\frac{9}{2}$$

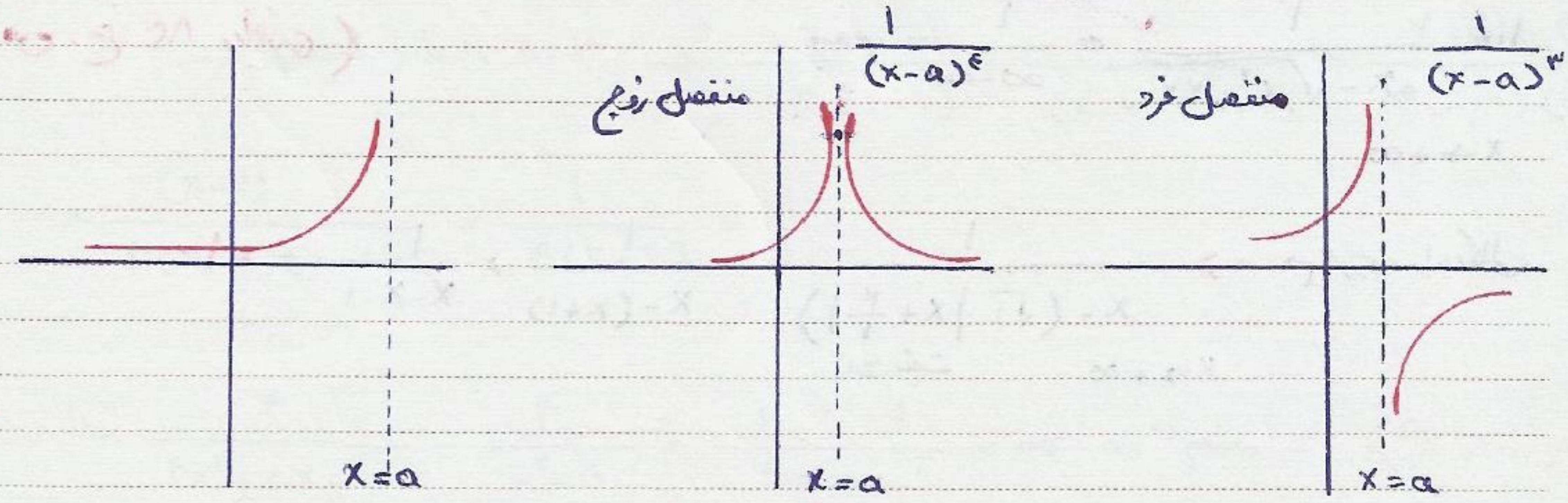
$$m+n=-\frac{1}{2}+\frac{9}{2}=\frac{8}{2}=4$$

مفهوم حد

شهریور ۱۳۹۳

1) مجانب قائم :

$$\lim_{x \to a^{\pm}} f(x) = \pm\infty$$



مفهوم حد

* مجانب قائم در توابع کسری :

$$\lim f(x) = \pm\infty$$

$x \to$ ریشه مخرج

نکته : ریشه‌های مخرج یک تابع مشکوک به مجانب قائم هستند !

مثال :

$$f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x^2-2x} \xrightarrow{x=2} \frac{1}{0} = +\infty$$

$x^2-2x=0 \to x(x-2)=0 \to x=2$ ✓

$\to x=0$ غ ق ق

* زیر رادیکال با فرجه ی زوج هیچ وقت منفی نمی‌شود !

بخاطر همین $x=0$ غیرقابل قبول است.

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x-3} = \frac{9-1}{3-3} = +\infty$$

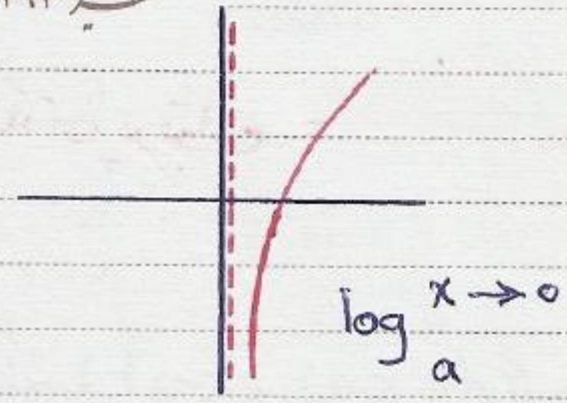
$x-3=0 \to x=3$ ✓

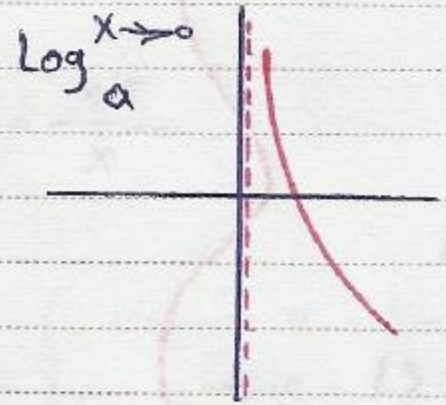
مجانب قائم است

مفهوم حد

شهریور ۱۳۹۳

* مجانب قائم در توابع لگاریتمی :





$y = \log \square^{\to 0}$

مثال: $y = \log(x-2) + \log(x-1)$

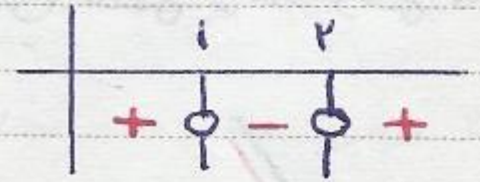
نکته) ریشه های صورت یک لگاریتم مشکوک به مجانب قائم شدن هستند !

$x-2=0 \to x=2$ ✓

$x-1=0 \to x=1$ غ ق ق صورت لگاریتم منفی شد

مفهوم حد

$y = \log (x-1)(x-2)$



$\to D: (-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$

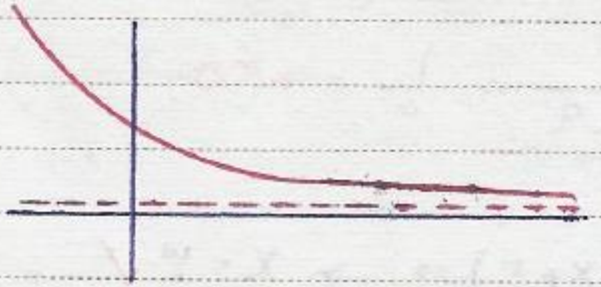
$x-1=0 \to x=1$ ✓ $\quad x-2=0 \to x=2$ ✓

تذکر: در مثال فوق درست است که $x=1$ در هنگام جای گذاری در $(x-2)$ حاصل را منفی می کند ولی چون این حاصل منفی در $(x-1)$ که صفر است ضرب می شود پس در نهایت حاصل کل صفر و قابل قبول است. پس هر دو مقدار $x=2$ و $x=1$ مجانب قائم می سازند

مفهوم حد

2) مجانب افقی:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = L$$



مثال:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x}{x+1} = 3$$

شهریور ۱۳۹۳

نکته‌ی پرتوان:

$$\frac{3x}{x} = 3$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} y = \sqrt{\frac{1-x^2}{x}}$$

$1-x^2 \geq 0$

$\to x^2 \leq 1$

$\to -1 \leq x \leq 1$ محدود

$$\lim_{x\to\pm\infty} y = \sqrt{4-x^2}$$

$4-x^2 \geq 0$

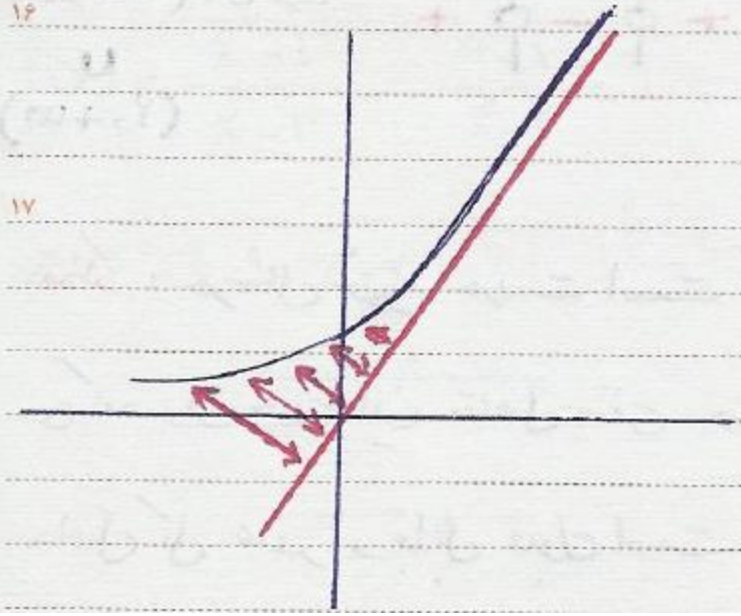
$\to x^2 \leq 4$

$\to -2 \leq x \leq 2$ محدود

نکته: توابعی که در دامنه‌ی خود محدود باشند، مجانب افقی ندارند. مانند ۲ مثال فوق

مفهوم حد

ج) مجانب مایل: اگر حد تابع $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ ممکن است بتوان خطی به معادله‌ی $y = mx + h$ یافت به گونه‌ای که فاصله‌ی قائم بین منحنی و خط وقتی که $x \to \pm\infty$ برود به صفر میل کند، این خط $y = mx + h$ را مجانب مایل می‌گویند.



$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$$

شرط وجود مجانب مایل $\leftarrow$ $\lim_{x \to \infty} \left(f(x) - (mx + h) \right) = 0$

پیوستــگی :

پیوستگی در نقطه

پیوستگی در نقطه

تعریف: تابع f که در بازه‌ی I تعریف شده است در نقطه‌ی x_0 از دامنه‌ی آن را پیوسته گویند، هرگاه:

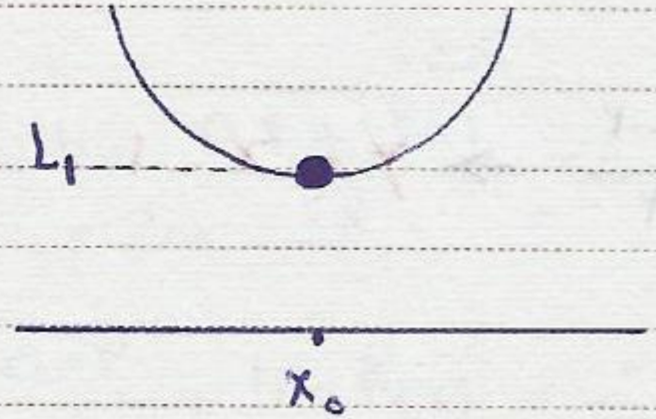
۱- تابع در $x = x_0$ حد داشته باشد.

۲- حد تابع در $x = x_0$ با مقدار تابع در x_0 برابر باشد، یعنی:

$$\lim_{x \to x_0} f(x_0) = f(x_0)$$

بنابراین هرگاه تابعی که روی یک بازه تعریف شده است و در یک نقطه از دامنه‌ی آن، دست کم یکی از دو شرط بـالا را نداشــته باشـد، در آن نقطه ناپیوسته است.

پیوستگی :



$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0) = L$$ تابع پیوسته است

پیوستگی :

پیوســتگی :

📖 **مثــال 30 :** تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases} 2x+1 & |x|>2 \\ x^2+1 & |x|\leq 2 \end{cases}$، از نظر پیوستگی در دو نقطه به طول‌های 2 و 2– چگونه است؟

1) در 2– ناپیوسته، در 2 ناپیوسته

2) در 2– ناپیوسته، در 2 پیوسته

3) در 2– پیوسته، در 2 ناپیوسته

4) در 2– پیوسته، در 2 پیوسته

پیوستگی :

پاسخ : تابع f را می‌توان به صورت زیر نوشت :

$$f(x)=\begin{cases} ۲x+۱ & x>۲ \text{ یا } x<-۲ \\ x^{۲}+۱ & -۲\leq x\leq ۲ \end{cases}$$

$$\lim_{x\to ۲^{+}} f(x)=۵\ ,\ \lim_{x\to ۲^{-}} f(x)=۵\ ,\ f(۲)=۵\to$$ f در <u>2</u> پیوسته است

$$\lim_{x\to (-۲)^{+}} f(x)=۵\ ,\ \lim_{x\to (-۲)^{-}} f(x)=-۳\ ,\ f(-۲)=۵\to$$ f در <u>2-</u> ناپیوسته است

گزینه 2 صحیح است .

پیوســتگی :

در تابع $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-1}{\left|x^2-1\right|} & x\neq 1\\ k & x=1\end{cases}$ اگر تابع در نقطه‌ی $x=1$ پیوستگی چپ داشته باشد، آن‌گاه k کدام است؟

1) $-\frac{1}{2}$ 2) $\frac{1}{2}$ 3) 2 4) -2

پیوستــگی :

پاسخ : برای تعیین حد چپ، ابتدا باید عبارت قدرمطلق‌دار، بدون قدرمطلق نوشته شود. وقتی $x \to 1^-$ یعنی $x < 1$

و $x^2 - 1 < 0$ بنابراین : $|x^2 - 1| = -(x^2 - 1)$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{\cancel{x - 1}}{-\cancel{(x - 1)}(x + 1)} = \lim_{x \to 1^-} \frac{1}{-(x + 1)} = -\frac{1}{2}$$

$$f(1) = k \to k = -\frac{1}{2}$$

گزینه 1 صحیح است.

پیوستگی :

فرض کنید $f(x)=\begin{cases}(x-۱)[x] & ; |x-۱|<۱\\ x^۲+ax+b & ; |x-۱|\geq ۱\end{cases}$، یک تابع همواره پیوسته باشد. مقدار a، کدام است؟

۱) $-\frac{۳}{۲}$

۲) -۱

۳) ۱

۴) $\frac{۵}{۲}$

پیوستگی :

$$f(x)=\begin{cases}(x-۱)[x] & ;|x-۱|<۱\\ x^۲+ax+b & ;|x-۱|\geq ۱\end{cases}=\begin{cases}(x-۱)[x] & ;-۱<x-۱<۱\\ x^۲+ax+b & ;x-۱\geq ۱ \text{ یا } x-۱\leq -۱\end{cases}$$

$$=\begin{cases}(x-۱)[x] & ;۰<x<۲\\ x^۲+ax+b & ;x\geq ۲ \text{ یا } x\leq ۰\end{cases}$$

بنابراین برای اینکه تابع همواره پیوسته باشد، باید در $x=۰$ و $x=۲$ پیوسته باشد؛ پس:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to ۲^+} f(x)=۴+۲a+b\\ \lim\limits_{x\to ۲^-} f(x)=(۲-۱)[۲^-]=۱\end{cases}\Rightarrow ۴+۲a+b=۱ \quad (I)$$

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to ۰^+} f(x)=(۰-۱)[۰^+]=۰\\ \lim\limits_{x\to ۰^-} f(x)=b\end{cases}\Rightarrow b=۰ \quad (II)$$

$$\xrightarrow{(I),(II)} a=-\frac{۳}{۲}$$

پیوستگی :

با کدام مجموعه مقادیر a، تابع با ضابطهٔ $f(x) = \begin{cases} \dfrac{۱}{x+a} & ; x \geq -۱ \\ x^۲ + ax & ; x < -۱ \end{cases}$ در $x = -۱$ پیوسته است؟

۱) $\{۱, \sqrt{۲}\}$

۲) $\{۱+\sqrt{۲}, ۱-\sqrt{۲}\}$

۳) $\varnothing$

۴) $\mathbb{R}$

پیوستگی :

تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x = x_0$ پیوسته است هرگاه داشته باشیم:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} \frac{1}{x+a} = \frac{1}{-1+a}$$

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} x^2 + ax = 1 - a$$

$$f(-1) = \frac{1}{-1+a}$$

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^-} f(x) = f(-1) \Rightarrow \frac{1}{-1+a} = 1 - a$$

$$\Rightarrow -(1-a)(1-a) = 1 \Rightarrow -(1-a)^2 = 1 \Rightarrow (1-a)^2 = -1 \quad (*)$$

معادلهٔ $(*)$ فاقد ریشهٔ حقیقی است، پس مجموعه مقادیر a برابر $\varnothing$ می‌شود.

پیوستگی در بازه:

به ازای کدام مقادیر a تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x} & ; 0<x<a \\ 1-\dfrac{x}{4} & ; x\geq a \end{cases}$، همواره پیوسته است؟

۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

۴) هیچ مقدار a

پیوستگی در بازه:

شرط پیوستگی در نقطهٔ a:

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$$

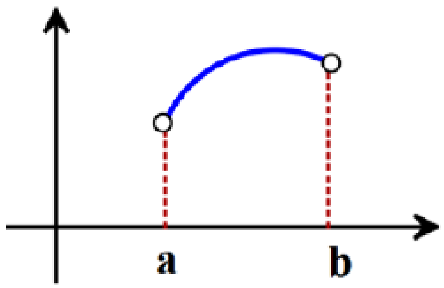
$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \dfrac{۱}{a} \\ f(a) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = ۱ - \dfrac{a}{۴} \end{cases} \Rightarrow \frac{۱}{a} = ۱ - \frac{a}{۴} \Rightarrow \frac{۱}{a} = \frac{۴ - a}{۴}$$

$$\Rightarrow ۴ = ۴a - a^{۲} \Rightarrow a^{۲} - ۴a + ۴ = ۰ \Rightarrow (a - ۲)^{۲} = ۰ \Rightarrow a = ۲$$

پیوستگی در بازه :

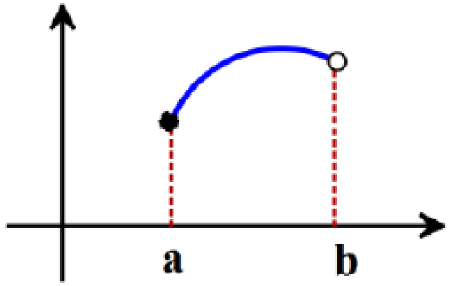
1) تابع f در (a,b) پیوسته است :

اگر در تک تک نقاط درون بازه پیوسته باشد.



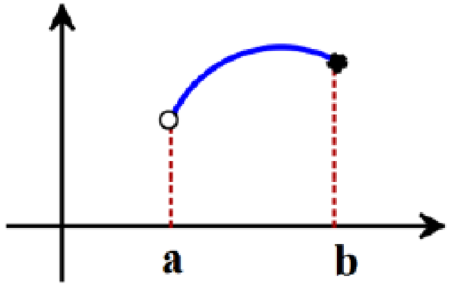
2) تابع f در $[a,b)$ پیوسته است :

اگر اولاً در تک تک نقاط درون بازه پیوسته باشد و ثانیاً در $x=a$ پیوستگی راست داشته باشد.



3) تابع f در $(a,b]$ پیوسته است :

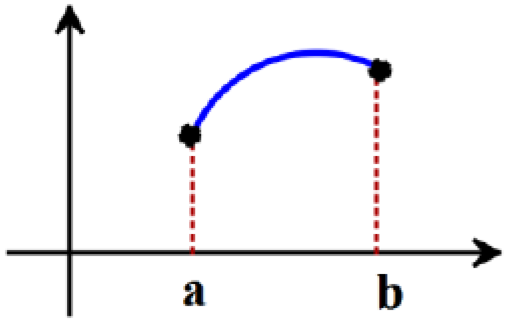
اگر اولاً در تک تک نقاط درون بازه پیوسته باشد و ثانیاً در $x=b$ پیوستگی چپ داشته باشد.



پیوســتــگی در بـــازه :

4) تابع f در $[a,b]$ پیوسته است :

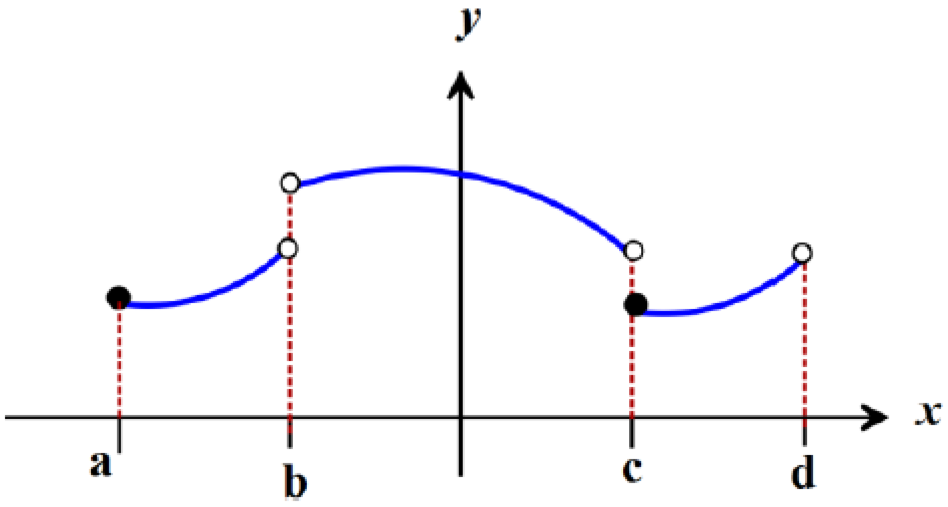
اگر اولاً در تک تک نقاط درون بازه پیوسته باشد و ثانیاً در $x=a$ پیوستگی راست و در $x=b$ پیوستگی چپ داشته باشد.



پیوستگی در بازه :

در شکل مقابل تابع f در چه بازه‌هایی پیوسته است؟

پاسخ : در بازه‌های $[a,b)$ و (b,c) و $[c,d)$ تابع پیوسته است.

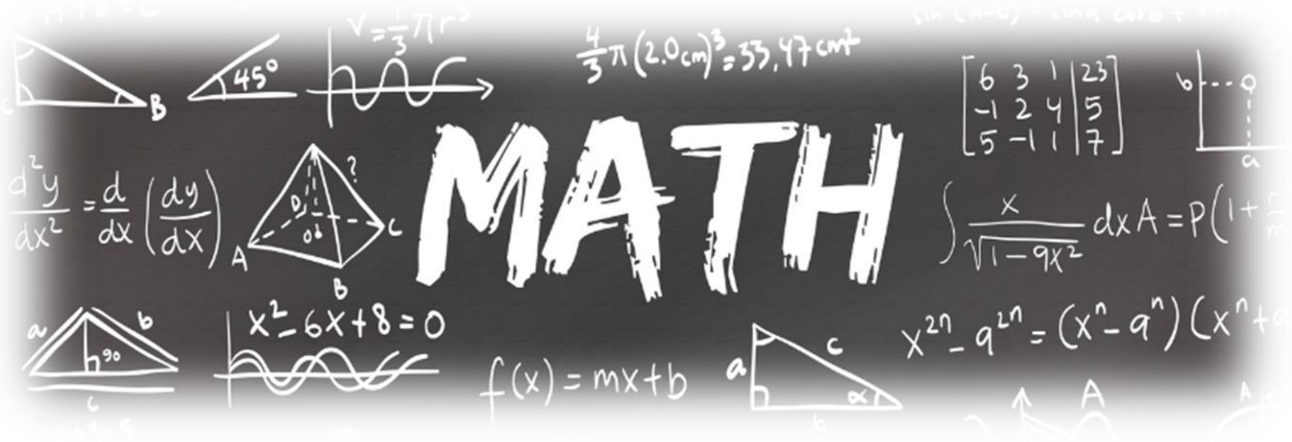


دانشگاه جامع علمی-کاربردی

شرکت حمل و نقل ریلی رجا

RAJA RAIL TRANSPORTATION CO.

دانشگاه جامع علمی-کاربردی



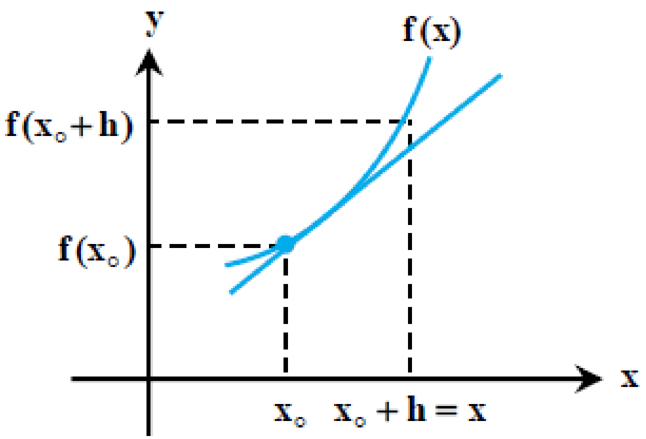
- عنوان درس: **ریاضیات**
- مدرس: **دکتر احمد رحمتی علائی**
- مبحث: مشتق تابع

مفهوم مشتق و فرمول‌های مشتق‌گیری

تعریف مشتق در یک نقطه

فرض می‌کنیم تابع $y=f(x)$ روی فاصله $(a\,,b)$ معین و در نقطه $x_\circ \in (a\,,b)$ پیوسته باشد، تابع f در نقطه $x_\circ$ مشتق‌پذیر است اگر حد زیر وجود داشته باشد، این حد را که با $f'(x_\circ)$ نمایش می‌دهیم، مشتق تابع $f(x)$ در نقطه $x_\circ$ است.

$$f'(x_\circ)=\lim_{x\to x_\circ}\frac{f(x)-f(x_\circ)}{x-x_\circ} \qquad (۱)$$



مفهوم مشتق و فرمول‌های مشتق‌گیری

تابع $f(x) = |x|$ در نقطه $x = ۰$ فاقد مشتق است زیرا

$$f'(۰) = \lim_{x \to ۰} \frac{|x| - ۰}{x - ۰} = \lim_{x \to ۰} \frac{|x|}{x} = \begin{cases} ۱ & x \to ۰^{+} \\ -۱ & x \to ۰^{-} \end{cases} = \text{موجود نیست}$$

مفهوم مشتق و فرمول‌های مشتق‌گیری

تابع

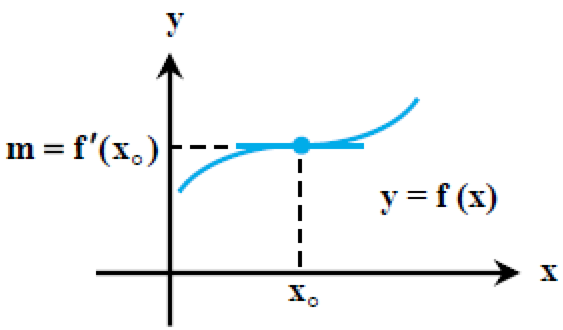
$$f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

در $x = 0$ مشتق پذیر نیست زیرا

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = \lim_{x \to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \text{موجود نیست}$$

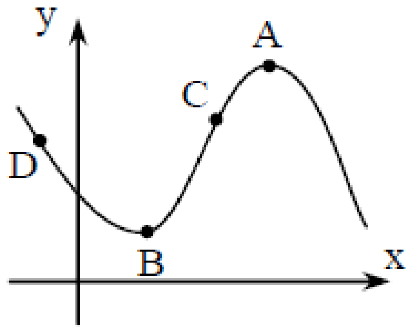
مفهوم مشتق و فرمول‌های مشتق‌گیری

تعبیر هندسی مشتق: اگر $M(x_\circ , f(x_\circ))$ یک نقطه روی منحنی $y=f(x)$ باشد، در این صورت $m=f'(x_\circ)$ ضریب زاویه خط مماس بر منحنی $y=f(x)$ در نقطه‌ای به طول $x_\circ$ می‌باشد و معادله خط مماس به صورت $y-y_\circ=m(x-x_\circ)$ است.



تذکر: در محاسبه بعضی حدود می‌توان با استفاده از تعریف مشتق حد را محاسبه کرد و معمولاً در این‌گونه مسائل و یا در مواقعی که محاسبه مشتق از روی فرمول‌ها ساده نباشد از تعریف مشتق استفاده می‌کنیم.

تست (۱): در کدام نقطه واقع بر منحنی روبه‌رو، مقدار مشتق بیش‌تر است؟
(منحنی مربوط به یک تابع مشتق‌پذیر در R است.)



۱) A　　　۲) B

۳) C　　　۴) D

حل: در نقاط A و B خط مماس بر منحنی تقریباً افقی و مقدار مشتق برابر صفر است. در نقطه‌ی D، شیب خط مماس عددی منفی و در نقطه‌ی C، شیب خط مماس عددی مثبت است. پس در نقطه‌ی C، مقدار مشتق تابع بزرگ‌تر است. بنابراین گزینه‌ی (۳) درست است.

مفهوم مشتق و فرمول‌های مشتق‌گیری

مشتق چپ و راست

الف) تابع f در $x = x_0$ مشتق راست دارد هرگاه حد مقابل وجود داشته باشد:

$$f'(x_0^+) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

ب) تابع f در $x = x_0$ مشتق چپ دارد هرگاه حد مقابل وجود داشته باشد:

$$f'(x_0^-) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

اگر تابعی در یک نقطه مانند x_0 دارای مشتق راست و چپ بوده و مقدار این دو مشتق با هم مساوی باشند، گوییم تابع در نقطه x_0 دارای مشتق است $f'(x_0^+) = f'(x_0^-) = f'(x_0)$ (عکس قضیه فوق نیز صادق است).

مفهوم مشتق و فرمول‌های مشتق‌گیری

اگر $f(x)=(x-۲)[۳x-۲]$ ، حاصل $f'_-(۲)-f'_+(۲)$ کدام است؟

۱) صفر　　۲) ۲　　۳) ۱　　۴) ۱-

$$f'_+(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$$f'_-(a)=\lim_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

مفهوم مشتق و فرمول‌های مشتق‌گیری

حل: چون $f(۲) = ۰$ داریم:

$$f'_+(۲) = \lim_{x \to ۲^+} \frac{f(x) - f(۲)}{x - ۲} = \lim_{x \to ۲^+} \frac{f(x)}{x - ۲} = \lim_{x \to ۲^+} \frac{(x - ۲)[۳x - ۲]}{x - ۲} = \lim_{x \to ۲^+} [۳x - ۲] = [۴^+] = ۴$$

به‌همین ترتیب به‌دست می‌آوریم: $f'_-(۲) = \lim_{x \to ۲^-} [۳x - ۲] = [۴^-] = ۳$، بنابراین $f'_-(۲) - f'_+(۲) = -۱$ و گزینه‌ی ۴ درست است.

$$\boxed{f'_-(a) = \lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}}$$

$$\boxed{f'_+(a) = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}}$$

رابطه بین مشتق و پیوستگی

اگر تابع $y=f(x)$ در نقطه $x=x_0$ دارای مشتق متناهی باشد، آنگاه $f(x)$ در x_0 پیوسته است. البته پیوستگی در یک نقطه شرط **لازم** برای مشتق‌پذیری در آن نقطه است ولی شرط کافی نمی‌باشد، به عبارت دیگر عکس قضیه فوق صادق نمی‌باشد، یعنی اگر تابعی در نقطه x_0 پیوسته باشد، دلیل بر مشتق‌پذیری تابع در نقطه x_0 **نخواهد بود**. برای مثال تابع $y=|x|$ در $x=0$ پیوسته است، ولی در این نقطه مشتق‌پذیر نیست.

مفهوم مشتق و فرمول‌های مشتق‌گیری

برای تابع f به معادله $f(x)=\begin{cases} 2x+1 & ; \quad x<0 \\ 1 & ; \quad x=0 \\ 2x-1 & ; \quad x>0 \end{cases}$، در نقطه $x=0$ کدام‌یک از موارد زیر نادرست است؟

۱) مشتق آن صفر است.
۲) حد چپ برابر ۱
۳) حد راست برابر ۱-
۴) گسسته است.

$$f(x)=\begin{cases} ۲x+۱ & ; \quad x<۰ \\ ۱ & ; \quad x=۰ \\ ۲x-۱ & ; \quad x>۰ \end{cases}$$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» با توجه به ضابطه‌ی تابع داده شده با محاسبه حد چپ و راست و مقدار f در $x=۰$ داریم:

$f(۰)=۱$ ، $\lim\limits_{x\to ۰^-} f(x)=\lim\limits_{x\to ۰^-}(۲x+۱)=۱$ ، حد راست $\lim\limits_{x\to ۰^+} f(x)=\lim\limits_{x\to ۰^+}(۲x-۱)=-۱$

چون تابع در $x=۰$ پیوسته نیست در نتیجه مشتق‌پذیر نمی‌باشد، پس گزینه (۱) نادرست است و بقیه گزینه‌ها درست هستند.

مفهوم مشتق و فرمول‌های مشتق‌گیری

فرض کنید $f(x)=\begin{cases}(1+e^{\frac{1}{x}})^{-1} & ; \ x\neq 0\\ 0 & ; \ x=0\end{cases}$ باشد. در این صورت کدام گزینه صحیح است؟

۱) $f(x)$ در $x=0$، فقط پیوستگی چپ دارد.

۲) $f(x)$ در $x=0$، پیوسته است ولی مشتق‌پذیر نیست.

۳) $f(x)$ در $x=0$، مشتق‌پذیر است.

۴) $f(x)$ در $x=0$، فقط پیوستگی راست دارد.

$$f(x)=\begin{cases}(1+e^{\frac{1}{x}})^{-1} & ; \ x\neq 0\\ 0 & ; \ x=0\end{cases}$$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» ابتدا شرایط پیوستگی تابع را در $x=0$ بررسی می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{ll}\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(1+e^{\frac{1}{x}})^{-1}=\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{0^+}}}=\dfrac{1}{1+e^{+\infty}}=\dfrac{1}{+\infty}=0 & \text{حد راست}\\[2em] \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(1+e^{\frac{1}{x}})^{-1}=\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{0^-}}}=\dfrac{1}{1+e^{-\infty}}=\dfrac{1}{1+0}=1 & \text{حد چپ}\end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to 0^+} f(x)=f(0)=0$$

بنابراین تابع موردنظر در نقطه‌ی $x=0$ فقط از راست پیوسته است، در نتیجه مشتق‌پذیر نیست.

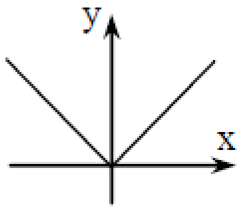
انواع نقاط مشتق‌ناپذیری:

دیدیم که دسته‌ی اول نقاط مشتق‌ناپذیری یک تابع، همان نقاط ناپیوستگی هستند. ولی نقاط دیگر مشتق‌ناپذیری را (یعنی نقاطی که تابع در آن‌ها پیوسته است، ولی مشتق‌پذیر نیست) می‌توانیم به سه دسته‌ی زیر تقسیم کنیم:

۱- نقاط زاویه‌دار: نقاطی که مانند $x = a$ در آن‌ها f پیوسته است و حداقل یکی از دو مقدار $f'_+(a)$ و $f'_-(a)$ موجود است، ولی تابع مشتق‌ناپذیر است.

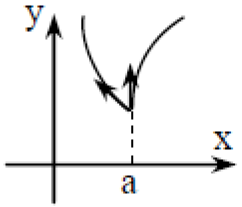
در این نقاط می‌توانیم دو نیم‌مماس از چپ و راست بر نمودار تابع رسم کنیم که با هم یک زاویه تشکیل می‌دهند.

مثال: تابع $f(x) = |x|$ در نقطه‌ی $x = ۰$ یک نقطه‌ی زاویه‌دار دارد، زیرا:



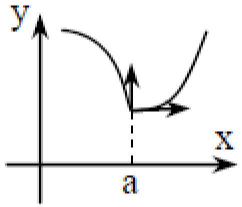
$$f'_+(۰) = ۱ \quad , \quad f'_-(۰) = -۱$$

به دو نمودار مقابل نیز دقت کنید:



$f'_-(a) =$ عدد حقیقی

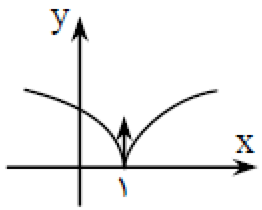
$f'_+(a) = +\infty$



$f'_-(a) = -\infty$

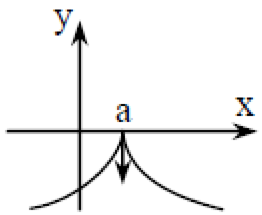
$f'_+(a) = ۰$

۲- نقاط بازگشت: نقاطی مانند $x=a$ که در آن‌ها f پیوسته است و $f'_+(a)$ و $f'_-(a)$ هر دو نامتناهی‌اند، ولی با علامت‌های مختلف (یعنی $f'_+(a)=+\infty$ و $f'_-(a)=-\infty$ یا بر عکس).



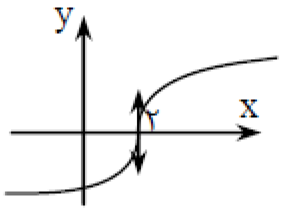
مثال: تابع $f(x)=\sqrt[۳]{(x-۱)^۲}$ در نقطه‌ی $x=۱$ نقطه‌ی بازگشت دارد، زیرا $f'_+(۱)=+\infty$ و $f'_-(۱)=-\infty$. به نمودار تابع دقت کنید:

هم‌چنین به نمودار روبه‌رو دقت کنید:



$$\begin{cases} f'_+(a)=-\infty \\ f'_-(a)=+\infty \end{cases}$$

۳- نقاط عطف قائم: نقاطی مانند $x=a$ که در آن‌ها f پیوسته است و $f'_+(a)=f'_-(a)=+\infty$ یا $f'_+(a)=f'_-(a)=-\infty$.



مثال تابع: $f(x)=\sqrt[۳]{x-۲}$ در نقطه‌ی $x=۲$ عطف قائم دارد. به نمودار تابع دقت کنید. داریم:

$f'_+(۲)=+\infty$ و $f'_-(۲)=+\infty$.

مفهوم مشتق و فرمول‌های مشتق‌گیری

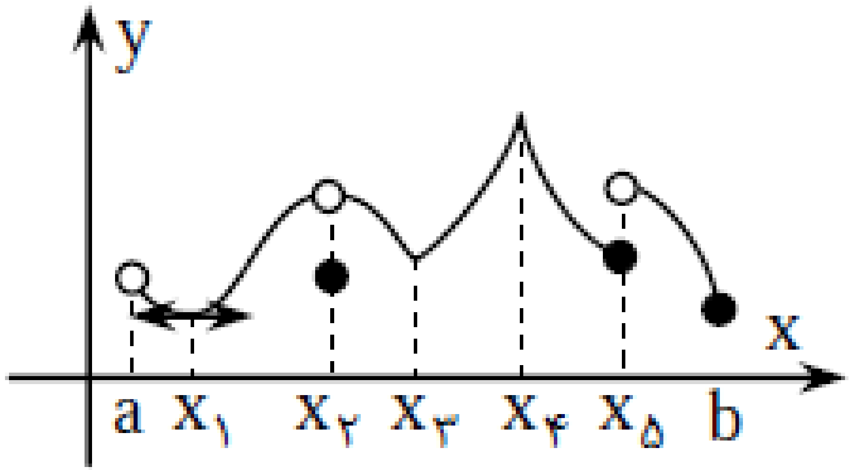
نمودار تابع روبه‌رو در بازه‌ی (a,b) در چند نقطه از نقاط x_i مشتق‌ناپذیر است؟

۱) ۲

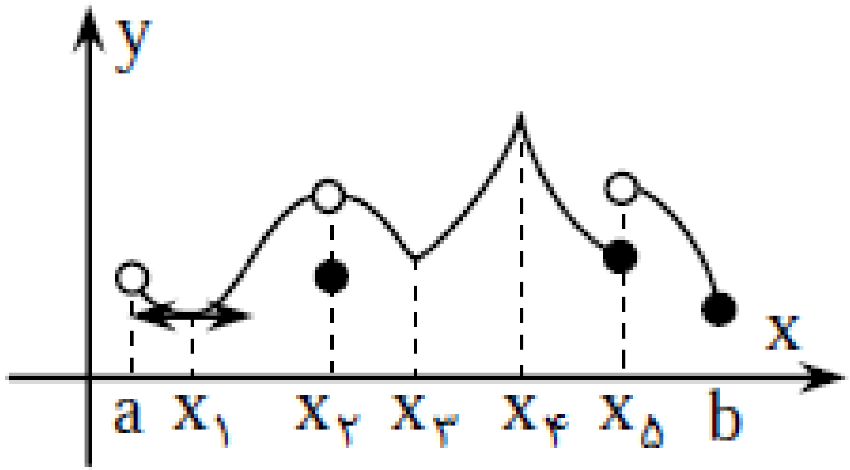
۲) ۳

۳) ۴

۴) ۵



۲- گزینه‌ی (۳) تابع در نقاط $x_۲$، $x_۳$، $x_۴$ و $x_۵$ مشتق‌ناپذیر است. نقاط $x_۲$ و $x_۵$ نقاط ناپیوستگی‌اند، نقطه‌ی $x_۳$ نقطه‌ی زاویه‌دار و نقطه‌ی $x_۴$، نقطه‌ی بازگشت است.



مفهوم مشتق و فرمول‌های مشتق‌گیری

خلاصه قواعد مشتق‌گیری: (در توابع زیر u , v توابعی مشتق‌پذیر برحسب x است.)

استفاده از تعریف مشتق برای محاسبه مشتق توابع بیشتر اوقات کار سختی است بنابراین باید از فرمول‌های ساده‌تر برای این کار استفاده کرد. مثلاً مشتق $y = x$ برابر **یک** است و یا مثلاً وقتی می‌خواهیم مشتق $y = x^۲$ را حساب کنیم سریع می‌گوییم $y' = ۲x$ و این بر اساس فرمول زیر است:

$$y = u^n \Rightarrow y' = nu'u^{n-۱}$$

در مثال $y = x^۲$ در واقع ما $u = x$ و $x = ۲$ در نظر گرفتیم و چون $u' = ۱$ لذا $y' = ۲\times۱\times x^{۲-۱} = ۲x$ به دست آمد. جدول زیر خلاصه فرمول‌های مهم است که باید آن‌ها را حفظ باشید.

مفهوم مشتق و فرمول‌های مشتق‌گیری

تابع در حالت کلی	مشتق تابع در حالت کلی	مثال مربوطه	مشتق مثال مربوطه
$f(x)=\underset{c\in\mathbb{R}}{c}$	$f'(x)=0$	$f(x)=(\sqrt{2}+1)^3$	$f'(x)=0$
$f(x)=\underset{a\in\mathbb{R}}{ax}$	$f'(x)=a$	$f(x)=\frac{3x}{2}$	$f'(x)=\frac{3}{2}$
$f(x)=x^n$	$f'(x)=nx^{n-1}$	$f(x)=x^3$	$f'(x)=3x^2$
$f(x)=u^n$	$f'(x)=nu^{n-1}.u'$	$f(x)=(5x^2+3x+1)^4$	$f'(x)=4(5x^2+3x+1)^3(10x+3)$
$f(x)=\sqrt[n]{u^m}$	$f'(x)=\frac{mu'}{n.\sqrt[n]{u^{n-m}}}$	$f(x)=x^{\frac{1}{2}}.\sqrt[3]{x}=x^{\frac{1}{2}}.x^{\frac{1}{3}}=x^{\frac{5}{6}}$	$f'(x)=\frac{5}{6}x^{-\frac{1}{6}}=\frac{5}{6.\sqrt[6]{x}}$
$f(x)=\sin u$	$f'(x)=u'\cos u$	$f(x)=\sin x^2$	$f'(x)=2x\cos x^2$
$f(x)=\cos u$	$f'(x)=-u'\sin u$	$f(x)=\cos 2x$	$f'(x)=-2\sin 2x$
$f(x)=tgu$	$f'(x)=u'(1+tg^2u)=\frac{u'}{\cos^2 u}$	$f(x)=tgx^2$	$f'(x)=(2x)(1+tg^2x^2)$
$f(x)=\cot gu$	$f'(x)=-u'(1+\cot g^2u)=-\frac{u'}{\sin^2 u}$	$f(x)=\cot g3x$	$f'(x)=-3(1+\cot g^2 3x)$
$f(x)=e^u$	$f'(x)=u'.e^u$	$f(x)=-2e^{x^2-1}$	$f'(x)=-2(2x)e^{x^2-1}=-4xe^{x^2-1}$

مفهوم مشتق و فرمول‌های مشتق‌گیری

$f(x)=a^u$	$f'(x)=u'.a^u.\mathrm{Ln}a\ (a>0)$	$f(x)=3^{tgx}$	$f'(x)=(1+tg^2x)(3^{tgx})\mathrm{Ln}3$
$f(x)=\log_a^u$	$f'(x)=\frac{u'}{u}\log_a^e\quad (u>0)$	$f(x)=\log_3^x$	$f'(x)=\frac{1}{x}\log_3^e$
$f(x)=\mathrm{Ln}u$	$f'(x)=\frac{u'}{u}$	$f(x)=\mathrm{Ln}\cos x$	$f'(x)=\frac{-\sin x}{\cos x}=-tgx$
$f(x)=\mathrm{Arc}\sin u$	$f'(x)=\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}\quad \lvert u\rvert<1$	$f(x)=\mathrm{Arcsin}x$	$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$f(x)=\mathrm{Arc}\cos u$	$f'(x)=\frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$f(x)=\mathrm{Arc}\cos x^2$	$f'(x)=\frac{-2x}{\sqrt{1-x^4}}$
$f(x)=\mathrm{Arctg}u$	$f'(x)=\frac{u'}{1+u^2}$	$f(x)=\mathrm{Arctg}(x^2-1)$	$f'(x)=\frac{2x}{1+(x^2-1)^2}$
$f(x)=\mathrm{Arc}\cot gu$	$f'(x)=\frac{-u'}{1+u^2}$	$f(x)=\mathrm{Arc}\cot g\sqrt{x}$	$f'(x)=\frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1+(\sqrt{x})^2}=\frac{-1}{2\sqrt{x}(1+x)}$

مفهوم مشتق و فرمول‌های مشتق‌گیری

به مثال‌های زیر با توجه به جدول مشتق فوق برای تمرین بیشتر توجه کنید:

$$1)\ \mathbf{f(x)=\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}} \Rightarrow f'(x)=\frac{(1+\sqrt[3]{x})'}{3\sqrt[3]{(1+\sqrt[3]{x})^2}}=\frac{\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}}{3\sqrt[3]{(1+\sqrt[3]{x})^2}}=\frac{1}{(3\sqrt[3]{x^2})(3\sqrt[3]{(1+\sqrt[3]{x})^2})}=\frac{1}{9\sqrt[3]{x^2}\sqrt[3]{(1+\sqrt[3]{x})^2}}$$

برای مشتق گرفتن از تابع $f(x)$ از مشتق $(\sqrt[m]{u^n})'=\frac{nu'}{m\sqrt[m]{u^{m-n}}}$ استفاده می‌کنیم دقت کنید $u=1+\sqrt[3]{x}$ در نتیجه $u'=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ می‌باشد چون توان زیر رادیکال یک است و فرجه رادیکال بزرگ‌تر ۳ می‌باشد. در نتیجه در تابع $f'(x)$ توان عبارت زیر رادیکال بزرگ‌تر برابر $2=3-1$ می‌باشد.

شرکت حمل و نقل ریلی رجا
RAJA RAIL TRANSPORTATION CO.
دانشگاه جامع علمی-کاربردی

$$\mathbf{f(x) = \sin^{3} x} \Rightarrow f'(x) = 3 \times (\sin x)' \sin^{3-1} x = 3 \cos x \sin^{2} x$$

برای مشتق گرفتن از تابع $f(x)$ از فرمول $(u^n)' = nu'u^{n-1}$ استفاده می‌کنیم. دقت کنید $u = \sin x$ و $n = 3$ در نتیجه $u' = \cos x$ می‌باشد.

مفهوم مشتق و فرمول‌های مشتق‌گیری

$$\mathbf{f(x)=e^{۳x^۲}} \Rightarrow f'(x)=(۳x^۲)'e^{۳x^۲}=۳\times ۲xe^{۳x^۲}=۶xe^{۳x^۲}$$

برای مشتق گرفتن از تابع $f(x)$ از فرمول $(e^u)'=u'e^u$ استفاده می‌کنیم. دقت کنید $u=۳x^۲$ در نتیجه $u'=۶x$ می‌باشد.

ردیف	تابع	مشتق	مثال
۱	$y=a$	$y'=۰$	
۲	$y=ax+b$	$y'=a$	
۳	$y=ax^{n}$	$y'=nax^{n-۱}$	$y=۵x^{۳}\Rightarrow y'=۳\ ۵\ x^{۳-۱}=۱۵x^{۲}$
۴	$y=u\pm v$	$y'=u'\pm v'$	$y=۳x^{۴}-۱۸x^{۵}\Rightarrow y'=۱۲x^{۳}-۹۰x^{۴}$
۵	$y=u.v$	$y'=u'.v+v'.u$	$y=\ x^{۲}-۳x\ \ ۳x-۱\ \Rightarrow$ $y'=\ ۲x-۳\ \ ۳x-۱\ +۳\ x^{۲}-۳x$
۶	$y=\frac{u}{v}$	$y'=\frac{u'.v-v'.u}{v^{۲}}$	$y=\frac{x^{۲}+۲x}{۳x+۴}\Rightarrow y'=\frac{۲x+۲\ \ ۳x+۴\ -۳\ x^{۲}+۲x}{۳x+۴\ ^{۲}}$
۷	$y=u^{n}$	$y'=nu'u^{n-۱}$	$y=\ x^{۲}-۳x\ ^{۷}\Rightarrow y'=۷\ ۲x-۳\ \ x^{۲}-۳x\ ^{۶}$
۸	$y=\sqrt{u}$	$y'=\frac{u'}{۲\sqrt{u}}$	$y=\sqrt{x^{۲}+۵x}\Rightarrow y'=\frac{۲x+۵}{۲\sqrt{x^{۲}+۵x}}$
۹	$y=\sqrt[n]{u}$	$y'=\frac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-۱}}}$	$y=\sqrt[۵]{x^{۳}-x^{۲}}\Rightarrow y'=\frac{۳x^{۲}-۲x}{۵\sqrt[۵]{\left(x^{۳}-x^{۲}\right)^{۴}}}$
۱۰	$y=\sqrt[n]{u^{m}}$	$y'=\frac{mu'}{n\sqrt[n]{u^{n-m}}}$	$y=\sqrt[۷]{\left(x^{۲}-۴x+۱\right)^{۳}}\Rightarrow y'=\frac{۳\left(۲x-۴\right)}{۷\sqrt[۷]{\left(x^{۲}-۴x+۱\right)^{۴}}}$
۱۱	$y=\sin x$	$y'=\cos x$	
۱۲	$y=\cos x$	$y'=-\sin x$	
۱۳	$y=\tan x$	$y'=۱+\tan^{۲}x$	
۱۴	$y=\mathrm{Cot}x$	$y'=-\left(۱+\mathrm{Cot}^{۲}x\right)$	
۱۵	$y=\sin u$	$y'=u'\cos u$	
۱۶	$y=\cos u$	$y'=-u'\sin u$	$y=\cos\sqrt{x}\Rightarrow y'=\frac{-۱}{۲\sqrt{x}}\sin\sqrt{x}$
۱۷	$y=\tan u$	$y'=u'\left(۱+\tan^{۲}u\right)$	$y=\tan x^{۲}\Rightarrow y'=۲x\left(۱+\tan^{۲}x^{۲}\right)$
۱۸	$y=\mathrm{Cot}u$	$y'=-u'\left(۱+\mathrm{Cot}^{۲}u\right)$	
۱۹	$y=\sin^{n}u$	$y'=nu'\cos u\sin^{n-۱}u$	
۲۰	$y=\cos^{n}u$	$y'=-nu'\sin u\cos^{n-۱}u$	
۲۱	$y=\tan^{n}u$	$y'=nu'\left(۱+\tan^{۲}u\right)\tan^{n-۱}u$	
۲۲	$y=\mathrm{Cot}^{n}u$	$y'=-nu'\left(۱+\mathrm{Cot}^{۲}u\right)\cot^{n-۱}u$	

مشتق توابع مرکب

فرض کنیم تابع $g(x)$ در نقطه‌ی $x=a$ مشتق پذیر و تابع $f(x)$ در $g(a)$ مشتق پذیر باشد. آن‌گاه تابع $h(x)=f(g(x))$ در $x=a$ مشتق پذیر است و داریم:

$$h(x)=f(g(x)) \quad \Rightarrow \quad h'(a)=g'(a)f'(g(a))$$

$$(f(u))'=u'f'(u) \quad , \quad ((u)^m)'=m(u')(u)^{m-1}$$

اگر $f'(x)=\frac{۱}{۲x^{۲}+۳}$ باشد، آن‌گاه مشتق تابع $f\left(\frac{۱}{x}\right)$ را در $x=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ به دست آورید.

$$\left(f\left(\frac{۱}{x}\right)\right)' = \frac{-۱}{x^{۲}} f'\left(\frac{۱}{x}\right)\Bigg|_{\frac{\sqrt{۲}}{۲}} = \left(\frac{-۱}{x^{۲}}\right)\times\left(\frac{۱}{۲\left(\frac{۱}{x}\right)^{۲}+۳}\right)\Bigg|_{\frac{\sqrt{۲}}{۲}} = -۲\times\frac{۱}{۲\times(۲)+۳}=\frac{-۲}{۷}$$

اگر $f'(x)=\sqrt{x^{2}+1}$ باشد، مشتق تابع $y=f\left(5x^{2}-x\right)$ را نسبت به x تعیین کنید.

$$y=f\left(5x^{2}-x\right) \Rightarrow y'=(5x^{2}-x)'f'(5x^{2}-x) \Rightarrow y'=(10x-1)f'\left(5x^{2}-x\right)=(10x-1)\sqrt{\left(5x^{2}-x\right)^{2}+1}$$

مشتق $f\left(\sqrt[3]{6x+2}\right)$ در نقطه‌ی $x=1$ برابر -2 است. مشتق تابع f در نقطه‌ای به طول ۲ کدام است؟

- 1
- -1
- 4
- -4

$$h(x)=f\left(g(x)\right) \quad \Rightarrow \quad h'(a)=g'(a)f'\left(g(a)\right)$$

مشتق $f\left(\sqrt[۳]{۶x+۲}\right)$ در نقطه‌ی $x=۱$ برابر -۲ است. مشتق تابع f در نقطه‌ای به طول ۲ کدام است؟

$$\left(f\left(\sqrt[۳]{۶x+۲}\right)\right)'_{x=۱}=\left(\frac{۶}{۳\sqrt[۳]{(۶x+۲)^۲}}f'\left(\sqrt[۳]{۶x+۲}\right)\right)_{x=۱}=\frac{۶}{۱۲}f'(۲)=-۲\ \Rightarrow\ f'(۲)=-۴$$

اگر $f'(x) = \frac{۱}{\sqrt{x^{۲}+۱}}$ و $g(x) = f(\frac{۱}{x})$ ، آن‌گاه مقدار $g'(\frac{۳}{۴})$ کدام است؟

۱) $\frac{۱۶}{۱۵}$

۲) $\frac{۱۵}{۱۶}$

۳) $-\frac{۱۵}{۱۶}$

۴) $-\frac{۱۶}{۱۵}$

اگر $f'(x)=\dfrac{۱}{\sqrt{x^{۲}+۱}}$ **و** $g(x)=f(\dfrac{۱}{x})$ **، آن‌گاه مقدار** $g'(\dfrac{۳}{۴})$ **کدام است؟**

حل: چون $g(x)=f(\dfrac{۱}{x})$، با استفاده از قاعده‌ی زنجیره‌ای داریم:

$$g'(x)=f'(\frac{۱}{x})\times(\frac{۱}{x})'=f'(\frac{۱}{x})\times\frac{-۱}{x^{۲}}\Rightarrow g'(\frac{۳}{۴})=f'(\frac{۴}{۳})\times(-(\frac{۴}{۳})^{۲})$$

$$f'(x)=\frac{۱}{\sqrt{x^{۲}+۱}}\Rightarrow f'(\frac{۴}{۳})=\frac{۳}{۵}\Rightarrow g'(\frac{۳}{۴})=\frac{۳}{۵}\times\frac{-۱۶}{۹}=\frac{-۱۶}{۱۵}$$

بنابراین گزینه‌ی (۴) درست است.

مقدار مشتق تابع $f(x) = (x^{۱۰۰} + x^{۵۰} + ۵۰x^{۲} + ۵۰x + ۱)^{۱۰}$ در $x = ۰$ چقدر است؟

۱) ۱۰۰ ۲) ۲۰۰ ۳) ۴۰۰ ۴) ۵۰۰

مقدار مشتق تابع $f(x) = (x^{۱۰۰} + x^{۵۰} + ۵۰x^{۲} + ۵۰x + ۱)^{۱۰}$ در $x = ۰$ چقدر است؟

حل: اگر عبارت داخل پرانتز را $g(x)$ بنامیم، داریم: $f(x) = (g(x))^{۱۰}$، بنابراین:

$$f'(x) = ۱۰(g(x))^{۹} g'(x) \xrightarrow{x=۰} f'(۰) = ۱۰(g(۰))^{۹} g'(۰)$$

داریم: $g(۰) = ۱$. همچنین اگر از $g(x)$ مشتق بگیریم، یک چندجمله‌ای دیگر حاصل می‌شود که عدد ثابت آن برابر ۵۰ است و بقیه‌ی جملات مضربی از توان‌های x هستند. پس: $g'(۰) = ۵۰ \Rightarrow f'(۰) = ۱۰ \times ۱ \times ۵۰ = ۵۰۰$

بنابراین گزینه‌ی (۴) درست است.

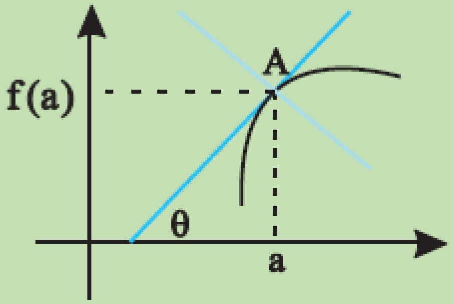
اگر $f(x)=\sqrt{۴x^{۲}+\sqrt{x^{۲}+۱}}$ و $g(x)=\sqrt{۴x^{۲}+۴+\sqrt{x^{۲}+۱}}$، آن‌گاه ثابت کنید: $\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{g'(x)}{f'(x)}$

اگر $f(x)=\sqrt{4x^2+\sqrt{x^2+1}}$ **و** $g(x)=\sqrt{4x^2+4+\sqrt{x^2+1}}$**، آن‌گاه ثابت کنید:** $\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{g'(x)}{f'(x)}$

حل: باید ثابت کنیم $ff'=gg'$. عبارت ff' شما را یاد مشتق چه تابعی می‌اندازد؟ اگر تابع $y=f^2(x)$ را در نظر بگیریم، داریم: $y'=2f(x)f'(x)$. پس کافی است برای حل سؤال ثابت کنیم که مشتق‌های دو تابع $f_1(x)=f^2(x)$ و $g_1(x)=g^2(x)$ برابرند. داریم:

$$\left.\begin{array}{l} f^2(x)=4x^2+\sqrt{x^2+1} \\ g^2(x)=4x^2+4+\sqrt{x^2+1} \end{array}\right\} \Rightarrow f^2(x)-g^2(x)=-4 \Rightarrow f_1(x)-g_1(x)=-4 \Rightarrow f_1'(x)-g_1'(x)=0 \Rightarrow f_1'(x)=g_1'(x)$$

شیب خط مماس بر منحنی و معادله‌ی خط مماس و قائم در نقطه‌ای روی منحنی:



اگر خط L در نقطه‌ای به طول a واقع بر منحنی نمایش تابع $y=f(x)$ مماس باشد،
شیب خط مماس از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

شیب خط مماس در نقطه‌ی A

$$m=\tan\theta=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$$

روش حل مسئله

۱) اول مختصات نقطه‌ای که می‌خواهیم مماس یا قائم در آن رابنویسیم معلوم کنید. $A\left|\begin{matrix} a \\ f(a) \end{matrix}\right.$

۲) از تابع $f(x)$ مشتق بگیرید و $f'(a)$ را تعیین کنید این همان شیب خط مماس است. $m = f'(a)$ و

$m' = \dfrac{-1}{f'(a)}$ شیب خط قائم است. (بعضی وقتا این مشتق رو از راه تعریف می‌خوان)

۳) معادله‌ی خط مماس و معادله‌ی خط قائم به شکل زیر نوشته می‌شوند:

خط مماس $L: \quad y - f(a) = f'(a)(x - a)$

خط قائم $L': \quad y - f(a) = \dfrac{-1}{f'(a)}(x - a)$

معادله‌ی خط مماس بر نمودار تابع $y = \dfrac{x}{x - ۲}$ را در نقطه‌ی $A(۳,۳)$ به دست آورید.

$$y' = \frac{-۲}{(x-۲)^{۲}} \quad \Rightarrow \quad m = y'_{(۳)} = -۲ \quad \Rightarrow \quad y - ۳ = -۲(x - ۳)$$

تعریف:

۱- فرض کنید $y=f(x)$ تابعی از x باشد. «آهنگ متوسط تغییر» تابع y نسبت به x در فاصله‌ی $[a,b]$، برابر نسبت تغییرات y به تغییرات x است، یعنی:

$$\bar{y}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

۲- اگر فاصله‌ی $[a,b]$ به یک لحظه محدود شود، «آهنگ آنی» یا «آهنگ لحظه‌ای» تغییر تابع به‌دست می‌آید. به بیان دقیق‌تر:

$$\text{آهنگ آنی تغییر} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)$$

تابع $f(x)$ با ضابطه‌ی $f(x)=x^{۲}+۵x+۴$ داده شده است.

الف) دستور کلی آهنگ متوسط تغییر این تابع را نسبت به متغیر x تعیین کنید.

ب) آهنگ متوسط تغییر این تابع را وقتی $x=۳$, $\Delta x=۰/۴$ را به دست آورید.

ج) آهنگ آنی را در $x=۳$ به دست آورید.

شرکت حمل و نقل ریلی رجا
RAJA RAIL TRANSPORTATION CO.
دانشگاه جامع علمی-کاربردی

تابع $f(x)$ با ضابطه‌ی $f(x)=x^{۲}+۵x+۴$ داده شده است.

الف) $$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(x+\Delta x)^{۲}+۵(x+\Delta x)+۴-(x^{۲}+۵x+۴)}{\Delta x}$$

ب) $$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(۳+۰/۴)^{۲}+۵(۳+۰/۴)+۴-((۳)^{۲}+۵(۳)+۴)}{۰/۴}=\frac{۱/۲+۰/۱۶+۲}{۰/۴}=\frac{۳/۳۶}{۰/۴}$$

ج) $$\lim_{\Delta x\to ۰}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x) \quad \Rightarrow \quad f'(۳)=(x^{۲}+۵x+۴)'_{۳}=(۲x+۵)_{۳}=۱۱$$

در چه نقطه ای از بازه $[۹,۲۵]$ آهنگ لحظه ای $f(x)=\sqrt{x}$ با آهنگ متوسط آن برابر است ؟

- 10
- 12
- 16
- 20

در چه نقطه ای از بازه $[۹,۲۵]$ آهنگ لحظه ای $f(x)=\sqrt{x}$ با آهنگ متوسط آن برابر است ؟

$$\frac{f(۲۵)-f(۹)}{۲۵-۹}=\frac{\sqrt{۲۵}-\sqrt{۹}}{۱۶}=\frac{۲}{۱۶}$$

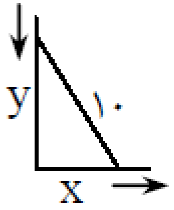
$$f'(x)=\frac{۱}{۲\sqrt{x}} \quad \Rightarrow \quad \frac{۱}{۸}=\frac{۱}{۲\sqrt{x}} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{x}=۴ \quad \Rightarrow \quad x=۱۶$$

گنجایش ظرفی ۴۰ لیتر مایع است. در لحظه $t=0$ سوراخی در ظرف ایجاد میشود اگر حجم مایع باقی مانده در ظرف پس از t ثانیه از رابطه ی $V_{(t)}=40\left(1-\frac{t}{100}\right)^2$ به دست می آید در چه زمانی آهنگ تغییر لحظه ای برابر آهنگ تغییر متوسط آن در بازه $[0,100]$ می شود ؟

$$\frac{V(100)-V(0)}{100-0}=\frac{0-40}{100}=\frac{-4}{10} \qquad , \qquad V'(t)=80\left(\frac{-1}{100}\right)\left(1-\frac{t}{100}\right)=\frac{-80}{100}\left(1-\frac{t}{100}\right)=\frac{-4}{100}$$

$$2-\frac{t}{50}=1 \qquad \Rightarrow \qquad t=50$$

نردبانی به طول ۱۰ متر به یک دیوار عمودی تکیه داده‌ایم و پایه‌ی آن تا دیوار ۶ متر فاصله دارد. پایه‌ی نردبان با سرعت $۱\frac{m}{s}$ شروع به لغزیدن می‌کند. لبه‌ی بالایی نردبان با چه سرعتی روی دیوار به پایین سر می‌خورد؟



حل: شکل مقابل بیانگر وضعیت شهودی نردبان است. می‌خواهیم وقتی که $\frac{dx}{dt}=۱\frac{m}{s}$ و $x=۶m$، مقدار $\frac{dy}{dt}$ را بیابیم. مانند مثال قبل x و y را با یک تساوی به هم ربط می‌دهیم و از دو طرف تساوی بر حسب t مشتق می‌گیریم:

$$x^۲+y^۲=۱۰^۲=۱۰۰\Rightarrow ۲x\frac{dx}{dt}+۲y\frac{dy}{dt}=۰ \quad , \quad \frac{dx}{dt}=۱\Rightarrow x+y\frac{dy}{dt}=۰\Rightarrow\frac{dy}{dt}=-\frac{x}{y}$$

در حالتی که $x=۶m$، $y=۸m$ داریم: بنابراین: $\frac{dy}{dt}=-\frac{۶}{۸}=-\frac{۳}{۴}$. علامت منفی نشان دهنده‌ی حرکت لبه‌ی بالایی در خلاف جهت لبه‌ی پایینی است. یعنی یکی در جهت کاهش متغیر و دیگری در جهت افزایش متغیر حرکت می‌کنند. پس در این شرایط لبه‌ی بالایی نردبان با سرعت $۰/۷۵\frac{m}{s}$ به پایین می‌سرد.

مشتق تابع وارون

یکی از نتایجی که از قاعده‌ی زنجیره‌ای می‌توان به‌دست آورد، درباره‌ی مشتق تابع وارون است. فرض کنید $f(a)=b$ و f تابعی وارون‌پذیر باشد. از $f(a)=b$ نتیجه می‌گیریم $f^{-1}(b)=a$. حال برای مشتق‌گیری از f^{-1}، از رابطه‌ی $f^{-1}(f(x))=x$ استفاده می‌کنیم. طبق قاعده‌ی زنجیره‌ای داریم:

$$(f^{-1})'(f(x))\times f'(x)=(x)' \Rightarrow (f^{-1})'(f(x))\times f'(x)=1$$

$$\xrightarrow[f(a)=b]{x=a}(f^{-1})'(b)\times f'(a)=1 \Rightarrow (f^{-1})'(b)=\frac{1}{f'(a)}$$

قضیه: **مشتق تابع وارون**

اگر تابع f در همسایگی نقطه‌ی $x=a$ وارون‌پذیر و مشتق‌پذیر باشد و $f(a)=b$، آن‌گاه با فرض $f'(a)\neq 0$ داریم:

$$(f^{-1})'(b)=\frac{1}{f'(a)}$$

مشتق در توابع شامل قدرمطلق

معمولاً در توابعی که قدرمطلق دارند، بهتر است ابتدا با تعیین علامت عبارت داخل قدرمطلق و تعیین محدوده، قدرمطلق را حذف کنیم، سپس از تابع مشتق بگیریم.

مسألهی (۱۳): مشتق تابع $f(x)=(x^2-1)^2\,|x+1|$ را به‌دست آورید.

حل: تابع f را می‌توان به صورت دو ضابطه‌ای بیان کرد:

$$f(x)=(x^2-1)^2\,|x+1|=\begin{cases}(x^2-1)^2(x+1) & x\geq -1\\ -(x^2-1)^2(x+1) & x<-1\end{cases}\Rightarrow f(x)=\begin{cases}x^5+x^4-2x^3-2x^2+x+1 & x\geq -1\\ -(x^5+x^4-2x^3-2x^2+x+1) & x<-1\end{cases}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}5x^4+4x^3-6x^2-4x+1 & x>-1\\ -5x^4-4x^3+6x^2+4x-1 & x<-1\end{cases}$$

تنها باید در نقطه‌ی $x=-1$ جداگانه مشتق را بررسی کنیم که: $f'_+(-1)=f'_-(-1)=0$

اندازه‌ی مشتق تابع $y = |x| + |x^۲ - ۲x|$ در نقطه‌ی $x = -۱$ چقدر است؟

۱) ۵

۲) ۵−

۳) ۳−

۴) ۳

اندازه‌ی مشتق تابع $y=|x|+|x^{2}-2x|$ در نقطه‌ی $x=-1$ چقدر است؟

حل: نقطه‌ی $x=-1$ ریشه‌ی $x^{2}-2x$ نیست و مقدار عبارت به ازای آن مثبت می‌شود. پس $x^{2}-2x$ در همسایگی $x=-1$ مثبت است و می‌توانیم علامت قدرمطلق آن را حذف کنیم. همچنین در همسایگی $x=-1$ به وضوح داریم: $|x|=-x$. پس:

$$y=-x+x^{2}-2x=x^{2}-3x \Rightarrow y'=2x-3 \xrightarrow{x=-1} y'=-2-3=-5$$

بنابراین گزینه‌ی (۲) درست است.

شرکت حمل و نقل ریلی رجا
RAJA RAIL TRANSPORTATION CO.
دانشگاه جامع علمی-کاربردی

مشتق در توابع شامل جزءصحیح

مشتق در توابع شامل جزءصحیح نیز مانند مشتق در توابع شامل قدرمطلق است. یعنی در محدوده‌ی مناسب، بهتر است جزءصحیح را حذف کنیم، سپس مشتق بگیریم.

مقدار مشتق تابع $y = x^{٣} + x[\frac{٣}{٢} - x]$ در نقطه‌ی $x = ٢$ چقدر است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۱ ۳) ۱۳ ٤) ۱۰

مقدار مشتق تابع $y = x^{۳} + x[\frac{۳}{۲} - x]$ در نقطه‌ی $x = ۲$ چقدر است؟

حل: در نقطه‌ی $x = ۲$، داریم $[\frac{۳}{۲} - x] = [-\frac{۱}{۲}] = -۱$، چون به ازای $x = ۲$ عبارت داخل جزءصحیح عددی صحیح نیست، در یـک همـسایگی $x = ۲$، مقدار جزءصحیح برابر ۱- است، در نتیجه:

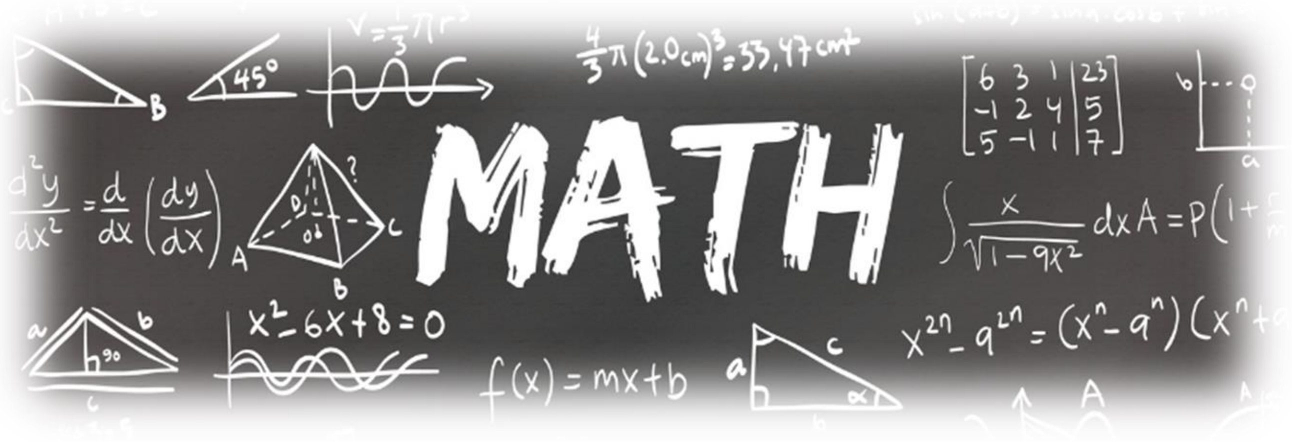
$$y = x^{۳} - x \Rightarrow y' = ۳x^{۲} - ۱ \xrightarrow{x=۲} y' = ۳ \times ۴ - ۱ = ۱۱$$

بنابراین گزینه‌ی (۲) درست است.

دانشگاه جامع
علمی-کاربردی

شرکت حمل و نقل ریلی رجا
RAJA RAIL TRANSPORTATION CO.

دانشگاه جامع
علمی-کاربردی



- عنوان درس: **ریاضیات**

- مدرس: **دکتر احمد رحمتی علائی**

- مبحث: **انتگرال تابع**

انتگرال

به صورت خیلی ساده **انتگرال گیری عکس عمل مشتق گیری** است اما چطور؟ به مثال زیر دقت کنید:

$$y' = 2x \xrightarrow{\text{مشتق}} y = x^2$$

حالا اگه از شما بپرسن اون چه تابعی هست که مشتقش شده $2x$ چی میگین؟ حتما سریع میگین: خب معلومه x^2 شایدم یکی بگه x^2+5 یا x^2+1 و همه این جوابها هم درسته. واقعیت اینه که شما نمی تونید بگید عدد ثابتی که با x^2 جمع شده چند بوده چون در مشتق گیری عدد ثابت حذف میشه (صفر میشه) بنابراین به صورت کلی می تونیم بگیم جواب ما x^2+c هست که c یه عدد ثابته. به بیان انتگرالی داریم:

$$\int 2x\,dx = x^2 + c$$

شکل کلی یک انتگرال به صورت زیرهست:

$$\int_a^b f(x)dx$$

که a را حد پایین و b را حد بالای انتگرال می گوییم $f(x)$ هم تابع جلوی انتگرال هست.

<u>تذکر یک:</u> اگر حدود انتگرال یعنی a,b داده شده باشند انتگرال رو معین و در غیر اینصورت انتگرال رو نامعین میگوییم.

انتگرال معین $\Rightarrow$ $\int_a^b f(x)dx$

انتگرال نامعین $\Rightarrow$ $\int f(x)dx$

انتگرال معین

به بیان انتگرالی داریم :

$$\int f(x)dx = g(x) \quad \rightarrow \quad g'(x) = f(x)$$

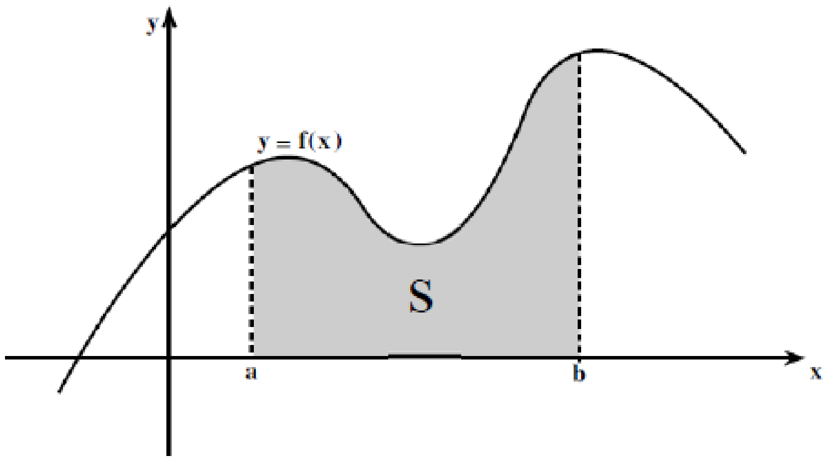
به عنوان مثال:

$$\int \cos x \; dx = \sin x \quad \Rightarrow \quad (\sin x)' = \cos x$$

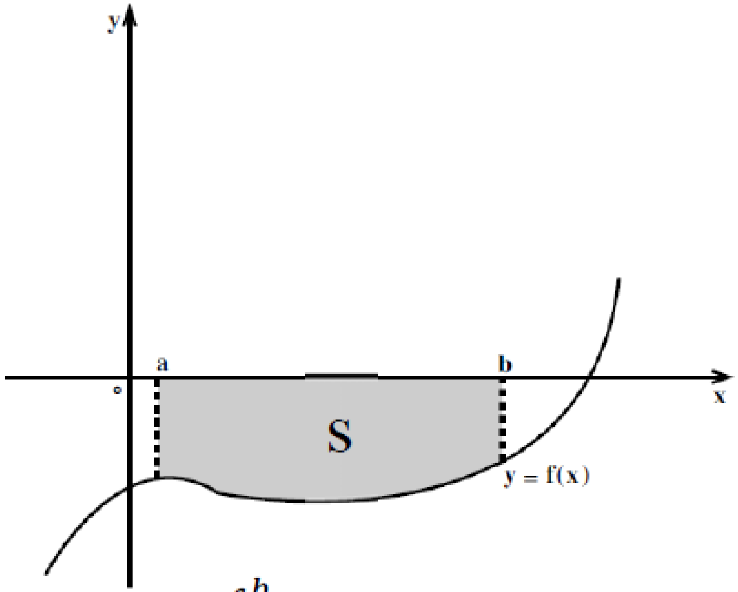
$$\int \frac{dx}{x} = Ln|x| \quad \Rightarrow \quad (Ln\, x)' = \frac{1}{x}$$

انتگرال معین

فرض کنید تابع f در بازه ی بسته $[a,b]$ پیوسته باشد. در این صورت انتگرال معین تابع $f(x)$ از a تا b که آن را با $\int_a^b f(x)dx$ (بخوانید انتگرال $f(x)$ از a تا b) نشان می دهیم برابر با مساحت علامت دار (مثبت یا منفی) ناحیه محصور بین نمودار $y=f(x)$ و محور xها و خطوط $x=a$ و $x=b$ است. مقادیر a و b را حدود انتگرال گیری می نامیم و dx نشان دهنده این است که متغیر انتگرال گیری x است. دقت کنید مساحت همیشه مثبت است ولی انتگرال معین می تواند مثبت، منفی یا برابر صفر باشد.



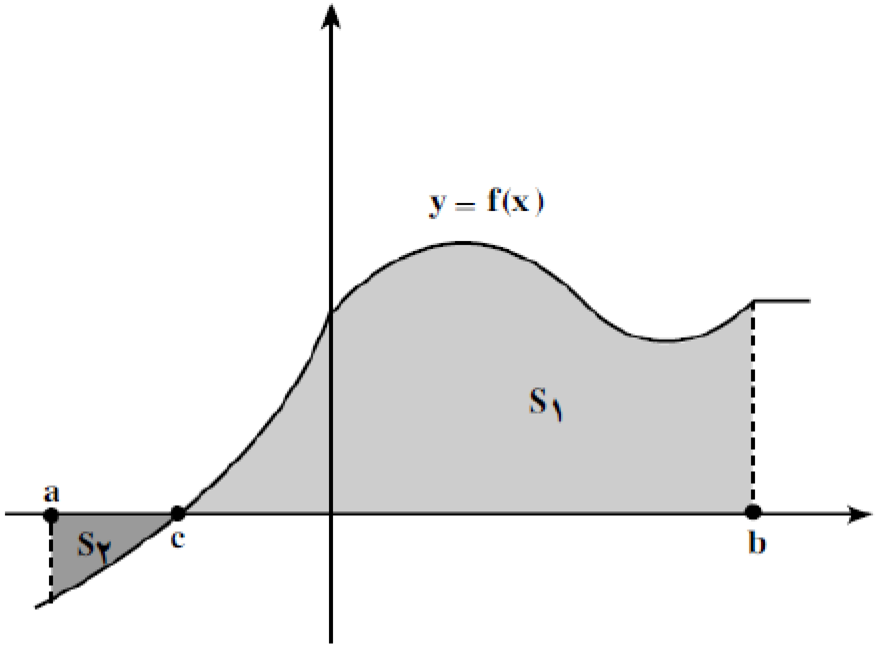
$$\int_a^b f(x)dx = S$$



$$\int_a^b f(x)dx = -S$$

انتگرال معین

فراموش نکنید که: در حالت سمت چپ $f(x) \geq 0$ و در حالت سمت راست $f(x) \leq 0$ می باشد.



$$\int_a^b f(x)dx = S_1 - S_2$$

انتگرال معین

$$\int (f(x) \pm g(x) \pm \cdots)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx \pm \cdots$$

$$\int (x^2 + 3x - 7)\,dx = \int x^2 dx + \int 3x\,dx - \int 7dx$$

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$$

$$(a) \int 5x\,dx = 5\int x\,dx \qquad (b) \int \frac{x^2}{3}dx = \frac{1}{3}\int x^2 dx$$

$$(c) \int tx^2 dx = t\int x^2 dx \qquad (d) \int tx^2 dt = x^2 \int t\,dt$$

انتگرال معین

$$\int f(x).\, g(x)dx \neq \left(\int f(x)dx\right)\left(\int g(x)dx\right)$$

$$\int \frac{f(x)}{g(x)}dx \neq \frac{\int f(x)dx}{\int g(x)dx}$$

نکته مهم: برای محاسبه انتگرالهای کسری که مخرج کسر تک جمله ای باشد معمولا بهتر است کسر را تفکیک کنیم

$$\frac{a+b+c}{\mathrm{d}} = \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{d}} + \frac{\mathrm{b}}{\mathrm{d}} + \frac{\mathrm{c}}{\mathrm{d}}$$

انتگرال معین

$$a)\int (5s^2-3\cos x)\,dx=\int 5s^2dx-\int 3\cos x\,dx=5s^2\int dx-3\int \cos x\,dx$$

$$b)\int \left(\frac{3x^4}{5}+\frac{2}{x}+7\right)dx=\int \frac{3x^4}{5}dx+\int \frac{2}{x}dx+\int 7\,dx=\frac{3}{5}\int x^4\,dx+2\int \frac{1}{x}dx+7\int dx$$

$$c)\int e^{x+y}\,dx=\int e^{y}e^{x}\,dx=e^{y}\int e^{x}dx$$

$$d)\int \frac{5x^2+3}{x}dx=\int \frac{5x^2}{x}dx+\int \frac{3}{x}dx=5\int x\,dx+3\int \frac{1}{x}\,dx$$

انتگرال معین

فرمولهای پایه انتگرال گیری

$$\int dx = x + c$$

$$\int dy = y + c \quad , \quad \int dt = t + c$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad n \neq -1$$

انتگرال معین

مثال: مطلوبست محاسبه انتگرال های زیر:

$$(a)\ \int x^2 dx \qquad (b)\ \int x^{\frac{3}{5}} dx \qquad (c)\ \int \sqrt{x}\, dx \qquad (d)\ \int \frac{1}{x^2} dx$$

$$(e)\ \int \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx \qquad (f)\ \int \frac{3x}{7} dx \qquad (g)\ \int (x\sqrt{x}+2) dx \qquad (h)\ \int \frac{4x^5+7}{3x^2} dx$$

انتگرال معین

$$(a)\ \int x^2 dx = \frac{x^{2+1}}{2+1} = \frac{x^3}{3} + c$$

$$(b)\ \int x^{\frac{3}{5}} dx = \frac{x^{\frac{3}{5}+1}}{\frac{3}{5}+1} = \frac{x^{\frac{8}{5}}}{\frac{8}{5}} = \frac{5}{8}\sqrt[5]{x^8} + c$$

$$(c)\ \int \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} = \frac{2}{3} x\sqrt{x} + c$$

$$(d)\ \int \frac{1}{x^2} dx = \int x^{-2} dx = \frac{x^{-2+1}}{-2+1} = \frac{x^{-1}}{-1} = -x^{-1} = \frac{-1}{x} + c$$

انتگرال معین

$$(g)\ \int (x\sqrt{x}+2)dx = \int x\sqrt{x}\,dx + \int 2dx = \int x.x^{\frac{1}{2}}\,dx + 2\int dx \ = \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}$$

$$(h)\ \int \frac{4x^5+7}{3x^2}dx = \int \left(\frac{4x^5}{3x^2}+\frac{7}{3x^2}\right)dx$$

$$= \int \frac{4}{3}x^3dx + \int \frac{7}{3}\frac{1}{x^2}dx = \frac{4}{3}\int x^3dx + \frac{7}{3}\int x^{-2}dx = \frac{4}{3}\left(\frac{x^4}{4}\right)$$

$$+\frac{7}{3}\left(\frac{x^{-1}}{-1}\right) = \frac{x^4}{3} - \frac{7}{3x} + c$$

انتگرال معین

$$(a)\int \cos x\,dx = \sin x + c \qquad (b)\int \sin x\,dx = -\cos x + c$$

انتگرال معین

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \qquad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x} \qquad \sec x = \frac{1}{\cos x} \qquad \csc x = \frac{1}{\sin x}$$

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1 \qquad \tan x + \cot x = \frac{1}{\sin x \, . \cos x} \qquad \tan x = \frac{1}{\cot x}$$

$$1 + tan^2(x) = sec^2(x) = \frac{1}{cos^2(x)} \qquad 1 + cot^2(x) = csc^2(x) = \frac{1}{sin^2(x)}$$

$$\cos 2x = cos^2(x) - sin^2(x) = 1 - 2sin^2(x) = 2cos^2\,(x) - 1$$

$$\sin 2x = 2 \sin x . \cos x \qquad (\sin x \pm \cos x)^2 = 1 \pm \sin 2x$$

انتگرال معین

مثال: مطلوبست حل انتگرال های زیر:

$$(a)\int \frac{cos^2x - sin^2x}{\cos x + \sin x}\,dx \qquad (b)\int \frac{\sin 2x}{\cos x}\,dx$$

$$(c)\int \frac{1+\sin 2x}{\sin x + \cos x}\,dx \qquad (d)\int (\tan x + \cot x)\sin 2x\,dx$$

$$(e)\int \sin x \,.\cos t\;dt \qquad (f)\int \frac{cos^2x}{1+\cos 2x}\,dx$$

انتگرال معین

$$(a) \int \frac{cos^2x - sin^2x}{\cos x + \sin x}\, dx = \int \frac{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}{(\cos x + \sin x)} dx$$

$$= \int (\cos x - \sin x) dx = \int \cos x \ dx - \int \sin x \ dx = \sin x + \cos x + c$$

$$(b) \int \frac{\sin 2x}{\cos x}\, dx = \int \frac{2 \sin x \cos x}{\cos x} dx = \int 2 \sin x \ dx = -2 \cos x + c$$

انتگرال معین

$$(c)\int \frac{1+\sin 2x}{\sin x+\cos x}\,dx=\int \frac{(\sin x+\cos x)^2}{\sin x+\cos x}dx=\int (sinx+cosx)\,dx$$
$$=-cosx+sinx=sinx-cosx+c$$

$$(d)\int (\tan x+\cot x)\sin 2x\,dx=\int \frac{\sin 2x}{\sin x\cos x}\,dx=\int \frac{2\sin x\cos x}{\sin x\cos x}\,dx$$
$$=\int 2\,dx=2x+c$$

انتگرال معین

$$(e)\int \sin x\,.\cos t\;\;dt=\sin x\int \cos t\,dt=\sin x\,.\sin t+c$$

$$(f)\int \frac{cos^2x}{1+\cos 2x}\,dx=\int \frac{\frac{1+\cos 2x}{2}}{1+\cos 2x}\,dx=\int \frac{1}{2}\,dx=\frac{x}{2}+c$$

دقت کنید در حل انتگرال بالا صورت کسر رو به شکل زیر نوشتیم:

$$\cos 2x=2cos^2x-1\quad\Rightarrow\quad 2cos^2x=1+\cos 2x\quad\Rightarrow\quad cos^2x=\frac{1+\cos 2x}{2}$$

انتگرال معین

$$\int e^x dx = e^x + c$$

مثال:

$$\int e^{x+2} dx = \int e^x . e^2 dx = e^2 \int e^x dx = e^2 (e^x + c) = e^{x+2} + c$$

انتگرال معین

اگر $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^{۲}+۱}} = A(x^{۲}+۱)^{k}+c$ باشد، A و k را بیابید.

انتگرال معین

اگر $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}} = A(x^2+1)^k + c$ باشد، A و k را بیابید.

انتگرال معین

اگر $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^{۲}+۱}} = A(x^{۲}+۱)^{k}+c$ باشد، A و k را بیابید.

حل: مشتق عبارت سمت راست عبارت داخل انتگرال را می‌دهد. پس ازسمت راست مشتق گرفته و با عبارت داخل انتگرال بدون dx برابر قرار می‌دهیم؛

$$Ak(۲x)(x^{۲}+۱)^{k-۱} = x(x^{۲}+۱)^{\frac{-۱}{۲}} \Rightarrow k-۱=\frac{-۱}{۲} \Rightarrow k=\frac{۱}{۲}\ ,\ ۲Ak=۱ \Rightarrow A=۱$$

$$(a)\int \frac{cos^2x-sin^2x}{\cos x+\sin x}\,dx=\int \frac{(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)}{(\cos x+\sin x)}dx$$

$$=\int (\cos x-\sin x)dx=\int \cos x\;dx-\int \sin x\;dx=\sin x+\cos x+c$$

$$(b)\int \frac{\sin 2x}{\cos x}\,dx=\int \frac{2\sin x\cos x}{\cos x}dx=\int 2\sin x\;dx=-2\cos x+c$$

انتگرال معین

$$(c)\int \frac{1+\sin 2x}{\sin x+\cos x}\,dx=\int \frac{(\sin x+\cos x)^2}{\sin x+\cos x}dx=\int (sinx+cosx)\,dx$$
$$=-cosx+sinx=sinx-cosx+c$$

$$(d)\int (\tan x+\cot x)\sin 2x\,dx=\int \frac{\sin 2x}{\sin x\cos x}\,dx=\int \frac{2\sin x\cos x}{\sin x\cos x}\,dx$$
$$=\int 2\,dx=2x+c$$

انتگرال معین

$$(e)\int \sin x\,.\cos t\ dt=\sin x\int \cos t\,dt=\sin x\,.\sin t+c$$

$$(f)\int \frac{cos^2x}{1+\cos 2x}\,dx=\int \frac{\frac{1+\cos 2x}{2}}{1+\cos 2x}\,dx=\int \frac{1}{2}\,dx=\frac{x}{2}+c$$

دقت کنید در حل انتگرال بالا صورت کسر رو به شکل زیر نوشتیم:

$$\cos 2x=2cos^2x-1 \quad\Rightarrow\quad 2cos^2x=1+\cos 2x \quad\Rightarrow\quad cos^2x=\frac{1+\cos 2x}{2}$$

انتگرال معین

$$\int e^x dx = e^x + c$$

مثال:

$$\int e^{x+2} dx = \int e^x . e^2 dx = e^2 \int e^x dx = e^2 (e^x + c) = e^{x+2} + c$$

انتگرال معین

توابع معکوس مثلثاتی

در آخرین بخش از این فصل به بررسی انتگرال توابع معکوس مثلثاتی(آرک سینوس و آرک تانژانت) می پردازیم.

همونطور که یادتون هست (که مطمئنم یادتون نیست!!!) از مبحث مشتق داشتیم:

$$y = \sin^{-1} x \quad \Longrightarrow \quad y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$y = \tan^{-1} x \quad \Longrightarrow \quad y' = \frac{1}{1+x^2}$$

انتگرال معین

توابع معکوس مثلثاتی

در آخرین بخش از این فصل به بررسی انتگرال توابع معکوس مثلثاتی(آرک سینوس و آرک تانژانت) می پردازیم.

همونطور که یادتون هست (که مطمئنم یادتون نیست!!!) از مبحث مشتق داشتیم:

$$y = \sin^{-1} x \qquad \Longrightarrow \qquad y' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$y = \tan^{-1} x \qquad \Longrightarrow \qquad y' = \frac{1}{1 + x^2}$$

انتگرال معین

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1} x + c$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1} x + c$$

و در حالت کلی داریم:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \sin^{-1} \frac{x}{a} + c$$

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a} + c$$

انتگرال معین

مثال: مطلوبست حل انتگرال های زیر:

$$(a)\ \int \frac{dx}{\sqrt{2-x^2}} \qquad (b) \int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}} \qquad (c) \int \frac{dx}{4+x^2} \qquad (d) \int \frac{dx}{1+9x^2}$$

انتگرال معین

حل:

$$(a)\ \int \frac{dx}{\sqrt{2-x^2}} \quad \Rightarrow \quad a^2 = 2 \quad \Rightarrow a = \sqrt{2} \quad \Rightarrow \int \frac{dx}{\sqrt{2-x^2}} = sin^{-1}\frac{x}{\sqrt{2}} + c$$

$$(b)\ \int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}} = \int \frac{dx}{2\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}} \quad \Rightarrow a^2 = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}} = \frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{x}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\sin^{-1} 2x + c$$

انتگرال معین

$$(c)\ \int \frac{dx}{4+x^2} = \int \frac{dx}{2^2+x^2} = \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{x}{2} + c$$

$$(d)\ \int \frac{dx}{1+9x^2} = \int \frac{dx}{9\left(\frac{1}{9}+x^2\right)} = \frac{1}{9}\int \frac{dx}{\frac{1}{9}+x^2} \Rightarrow a^2 = \frac{1}{9} \quad \Rightarrow a = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{9}\int \frac{dx}{\frac{1}{9}+x^2} = \frac{1}{9}\left(\frac{1}{\frac{1}{3}}\tan^{-1}\frac{x}{\frac{1}{3}}\right) = \frac{1}{3}\tan^{-1}3x + c$$

شرکت حمل و نقل ریلی رجا
RAJA RAIL TRANSPORTATION CO.
دانشگاه جامع علمی-کاربردی

روش تغییر متغیر (جانشینی)

انتگرال معین

تا اینجای کار برخی از انتگرال های ساده رو با استفاده از روابط پایه حساب کردیم اما خیلی از انتگرال هایی که ما باهاشون روبرو می شیم با استفاده از این فرمولها قابل حل نیستند بنابراین باید با استفاده از روشهای خاصی انتگرال های داده شده را ساده کنیم یکی از این روشها ، روش تغییر متغیر نام دارد که در ادامه به توضیح آن می پردازیم

انتگرال زیر رو در نظر بگیرید، (مشخصه که این انتگرال رو نمی تونیم از روابط پایه حساب کنیم)

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\,dx$$

انتگرال معین

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\, dx$$

ابتدا عبارت زیر رادیکال رو برابر یه متغیر جدید مثل u قرار میدیم و سپس از طرفین رابطه دیفرانسیل می گیریم:

$$u = x^2 - 1 \quad \Rightarrow \quad du = 2x\, dx$$

آقا اجازه: دیفرانسیل می گیریم یعنی چی؟

استاد: خیلی ساده بخوایم بگیم اول از عبارت مشتق بگیر بعد حاصل مشتق رو در dx ضرب کن.

حالا عبارت رو به صورت $dx = \cdots$ مرتب می کنیم

$$du = 2x\, dx \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{du}{2x}$$

انتگرال معین

سپس در انتگرال اولیه به جای $x^2 - 1$ ، u و به جای dx عبارت $\frac{du}{2x}$ رو قرار میدیم.

حالا انتگرال رو ساده می کنیم تا برحسب u در بیاد (x ها خط بخورن)

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} dx = \int \frac{x}{\sqrt{u}} \frac{du}{2x} = \int \frac{du}{2\sqrt{u}}$$

در آخر انتگرال رو بر حسب u حل کرده و در جواب انتگرال به جای u همان $x^2 - 1$ را قرار می دهیم.

$$\int \frac{du}{2\sqrt{u}} = \frac{1}{2} \int u^{\frac{-1}{2}} du = \frac{1}{2}\left(\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right) = u^{\frac{1}{2}} = \sqrt{u} + c = \sqrt{x^2 - 1} + c$$

انتگرال معین

مراحل کار در روش تغییر متغیر

در اینجا به خاطر اینکه به صورت اصولی با روش تغییر متغیر آشنا بشید مراحل کار رو به صورت قدم به قدم براتون توضیح میدم:

قدم اول

قسمتی از تابع جلوی انتگرال را برابر یک متغیر جدید مانند u قرار می دهیم مثلا:

$$\int x\sqrt{x^2+1}\,dx \quad \Rightarrow \quad u = x^2+1$$

انتگرال معین

قدم دوم

از تابع دیفرانسیل می گیریم و عبارت را به صورت $dx = \cdots$ مرتب می کنیم مثلا:

$$u = x^2 + 1 \quad \Rightarrow \quad du = 2x\,dx \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{du}{2x}$$

قدم سوم

با جایگذاری dx و u در انتگرال اولیه آن را بر حسب u بازنویسی می کنیم

$$\int x\sqrt{x^2+1}\,dx = \int x\sqrt{u}\,\frac{du}{2x} = \frac{1}{2}\int \sqrt{u}\,du$$

انتگرال معین

شرکت حمل و نقل ریلی رجا
RAJA RAIL TRANSPORTATION CO.
دانشگاه جامع علمی-کاربردی

قدم چهارم

انتگرال حاصل را بر حسب u حل کرده و در جواب نهایی به جای u همان عبارت بر حسب x را قرار می دهیم تا جواب نهایی بر حسب x بدست آید.

$$\frac{1}{2}\int \sqrt{u}\,du = \frac{1}{2}\int u^{\frac{1}{2}}\,du = \frac{1}{2}\left(\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right) = \frac{u^{\frac{3}{2}}}{3} = \frac{1}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}} + c = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2+1)^3} + c$$

انتگرال معین

الف) اگر در جلوی انتگرال عبارت رادیکالی داشتیم تابع زیر رادیکال را برابر u می گیریم مثلا:

$$\int \sqrt{3x-4}\,dx \quad \Rightarrow \quad u = 3x-4$$

ب) اگر در جلوی انتگرال پرانتز توان‌دار داشتیم تابع درون پرانتز(بدون توان) را برابر u می گیریم مثلا:

$$\int (5x-3)^4 dx \quad \Rightarrow \quad u = 5x-3$$

ج) اگر در جلوی انتگرال عباراتی به شکل $\sin(\dots)$ یا $\cos(\dots)$ یا مشابه آن داشتیم عبارت داخل پرانتز را برابر u می گیریم مثلا:

$$\int \sin(3x+2)\,dx \quad \Rightarrow \quad u = 3x+2$$

تذکر مهم: دقت کنید که تکنیکهای بالا درهمه موارد جواب نمیده

انتگرال معین

مثال: انتگرال های زیر را با استفاده از روش تغییر متغیر حل کنید.

$$(a)\ \int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}\,dx \qquad (b)\ \int x\sqrt{x-5}\,dx \qquad (c)\ \int \frac{x}{(x+1)^2}\,dx$$

$$(d)\ \int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx \qquad (e)\ \int \frac{Ln\ x}{x}\,dx \qquad (f)\ \int \frac{1}{x.\,Ln\ x}\,dx$$

$$(g)\ \int \frac{2x+3}{2x+1}\,dx \qquad (h)\ \int \frac{\sin 2x}{1+sin^2 x}\,dx \qquad (i)\ \int cos^2 x.\sin x\,dx$$

انتگرال معین

$$(a)\ \int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}\,dx \;\Rightarrow\; u=\cos x \;\Rightarrow\; du=-\sin x\,dx \;\Rightarrow dx=\frac{du}{-\sin x}$$

$$\Rightarrow \int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}\,dx=\int \frac{\sin x}{\sqrt{u}}\,\frac{du}{-\sin x}=-\int \frac{du}{\sqrt{u}}=-\int u^{\frac{-1}{2}}du=-2\sqrt{u}+c$$
$$=-2\sqrt{\cos x}+c$$

$$(b)\ \int x\sqrt{x-5}\,dx \;\Rightarrow\; u=x-5 \;\Rightarrow\; du=dx$$

$$\Rightarrow \int x\sqrt{x-5}\,dx=\int x\sqrt{u}\,du \;\Rightarrow\; x \text{ باقی ماند}$$

همون طور که می بینید x در انتگرال باقی موند و خط نخورد بنابراین باید یه فکری به حالش بکنیم چون انتگرال باید فقط بر حسب u در بیاد بنابراین به صورت زیر عمل می کنیم؛

انتگرال معین

$$u = x - 5 \Rightarrow x = u + 5$$

با جایگزینی این عبارت در انتگرال بالا داریم:

$$\Rightarrow \int x\sqrt{u}\,du = \int (u+5)\sqrt{u}\,du = \int (u+5)u^{\frac{1}{2}}\,du = \int (u^{\frac{3}{2}} + 5u^{\frac{1}{2}})\,du$$

$$= \frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}} + \frac{10}{3}u^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{5}(x-5)^{\frac{5}{2}} + \frac{10}{3}(x-5)^{\frac{3}{2}} + c$$

$$= \frac{2}{5}\sqrt{(x-5)^5} + \frac{10}{3}\sqrt{(x-5)^3} + c$$

توجه کنید در انتگرال های بعدی اگه لازم باشه x رو بر حسب u بدست بیاریم همون قدم اول این کار رو انجام میدیم.

انتگرال معین

$$(c)\int \frac{x}{(x+1)^2}\,dx \quad \Rightarrow u = x+1 \quad \Rightarrow \quad du = dx \quad , x = u-1$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{u-1}{u^2}\,du = \int \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u^2}\right) du = \int \frac{1}{u}\,du - \int \frac{1}{u^2}\,du = Ln\,|u| - \left(\frac{-1}{u}\right) + c$$

$$= Ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + c$$

$$(d)\ \int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx \quad \Rightarrow u = \sqrt{x} \quad \Rightarrow \quad du = \frac{dx}{2\sqrt{x}} \quad \Rightarrow dx = 2\sqrt{x}\,du$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{\sin u}{\sqrt{x}}\,2\sqrt{x}\,du = 2\int \sin u\,du = -2\cos u + c = -2\cos\sqrt{x} + c$$

دقت کنید در این مسئله اگر عبارت زیر رادیکال (یعنی x) رو برابر u می گرفتیم به همون انتگرال اولیه می رسیدیم.